

REPORT DOCUMENTATION PAGE			Form Approved OMB No. 0704-0188	
Public reporting burden for this collection of information is estimated to average 1 hour per response, including the time for reviewing instructions, searching existing data sources, gathering and maintaining the data needed, and completing and reviewing the collection of information. Send comments regarding this burden estimate or any other aspect of this collection of information, including suggestions for reducing this burden to Washington Headquarters Services, Directorate for Information Operations and Reports, 1215 Jefferson Davis Highway, Suite 1204, Arlington, VA 22202-4302, and to the Office of Management and Budget, Paperwork Reduction Project (0704-0188), Washington, DC 20503.				
1. AGENCY USE ONLY (Leave blank)	2. REPORT DATE  2001	3. REPORT TYPE AND DATES COVERED  Dissertation		
4. TITLE AND SUBTITLE  Direkte Berechnung der Kurzschlussreaktanzen, Wicklungskraefte und Eigenformen von Leistungstransformatoren  Direct calculation of Short Circuit Reactance, Winding Strength, and Inherent Forms of Output Transformers			5. FUNDING NUMBERS	
6. AUTHOR(S)  Christian Bollmann				
7. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES)  Fachbereich Elektrotechnik Universitaet der Bundeswehr Hamburg			8. PERFORMING ORGANIZATION Report Number REPORT NUMBER	
9. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) AND ADDRESS(ES)			10. SPONSORING/MONITORING AGENCY REPORT NUMBER	
11. SUPPLEMENTARY NOTES  Text in German. Title and abstract in German and English, 157 pages.				
12a. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT  Distribution A: Public Release.			12b. DISTRIBUTION CODE	
ABSTRACT (Maximum 200 words)  The dissertation seeks to employ boundary-element methods (regarding finite elements and differences) in determining how detailed the modeling of an output transformer must be in order to deliver sufficiently precise results. A two-dimensional transformer model, from which the unwinding of the transformer shall take place, is suitable for the calculation of magnetic fields, and yields valuable clarifications. The mathematical components to the study are described in terms of boundary- value tasks as stipulated within the boundary-element method, thereby making discrete the vector potential on the boundaries. The final chapter concerns the frequency and inherent forms of output transformers with and without the interpolation of inductive coupling.				
14. SUBJECT TERMS  German, Output transformers, Reactance, Short circuit, Winding strength, Boundary element methods			15. NUMBER OF PAGES	
			16. PRICE CODE	
17. SECURITY CLASSIFICATION OF REPORT  UNCLASSIFIED	18. SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE  UNCLASSIFIED	19. SECURITY CLASSIFICATION OF ABSTRACT  UNCLASSIFIED	20. LIMITATION OF ABSTRACT  UNLIMITED	

NSN 7540-01-280-5500

Standard Form 298 (Rev. 2-89)  
Prescribed by ANSI Std. Z39-18  
298-102

20021119 035

# **Direkte Berechnung der Kurzschlussreaktanzen, Wicklungskräfte und Eigenformen von Leistungstransformatoren**

Vom Fachbereich Elektrotechnik  
der  
Universität der Bundeswehr Hamburg  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs  
genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

**Christian Bollmann**  
aus Salzgitter

Hamburg 2001

**Reproduced From  
Best Available Copy**

---

**Copies Furnished to DTIC  
Reproduced From  
Bound Originals**

---

Referent: Prof. Dr.-Ing. K. Heuck  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. F. Taegen

Tag der mündlichen Prüfung: 20.03.2001

# **Direkte Berechnung der Kurzschlussreaktanzen, Wicklungskräfte und Eigenformen von Leistungstransformatoren**

Vom Fachbereich Elektrotechnik  
der  
Universität der Bundeswehr Hamburg  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs  
genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

**Christian Bollmann**  
aus Salzgitter

Hamburg 2001

AQ F03-02-0231

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Elektrische Energieversorgung an der Universität der Bundeswehr Hamburg.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Heuck, der die Anregung zu dieser Arbeit gab, gilt für seine tatkräftige Unterstützung und stete Diskussionsbereitschaft mein besonderer Dank.

Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Taegen danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferats und die wertvollen Hinweise bezüglich der energiegewichteten Windungslänge.

Herrn Dr.-Ing. K.-D. Dettmann möchte ich ebenfalls für seine Unterstützung vor allem in Fragen der Programmierung und seine zahlreichen weiterführenden Diskussionsbeiträge, wie z.B. über den Einfluss der Quersfelder, danken.

Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. E. Waldhaim dafür, dass er die Rechner am Fachgebiet für Elektrische Energieversorgung meinen immer wieder wachsenden Anforderungen entsprechend angepasst hat.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Lösung eines Randwertproblems mit der Randelementmethode</b>	<b>3</b>
2.1	Formulierung des Randwertproblems . . . . .	3
2.1.1	Beschreibung des verwendeten zweidimensionalen Modells . . . . .	3
2.1.2	Ableitung der Helmholtzschen Differentialgleichungen . . . . .	5
2.1.3	Formulierung der Randbedingungen . . . . .	8
2.1.4	Berücksichtigung der Stromeinprägungen . . . . .	11
2.1.5	Überblick über das behandelte Randwertproblem . . . . .	11
2.2	Numerische Lösung des Randwertproblems . . . . .	12
2.2.1	Bestimmung der Greenschen Funktionen der verwendeten Differentialoperatoren . . . . .	13
2.2.2	Anwendung des Greenschen Satzes zur Ermittlung von Randintegralgleichungen . . . . .	14
2.2.3	Spezielle Randintegrale . . . . .	15
2.2.4	Diskretisierung des Randwertproblems . . . . .	16
2.2.5	Einführung linearer Gleichungen für das Randwertproblem . . . . .	19
2.2.6	Zusammenfassen der linearen Gleichungen zu einem linearen Gleichungssystem . . . . .	21
2.2.7	Aufbau und Struktur des linearen Gleichungssystems . . . . .	22
2.2.8	Beispiel für die Blockstruktur des Gleichungssystems . . . . .	24
2.3	Spezieller Lösungsalgorithmus für das lineare Gleichungssystem des Randwertproblems . . . . .	25
2.3.1	Ausnutzung der Symmetrie des Modells . . . . .	26
2.3.2	Strukturierung der Gleichungssysteme durch Blockmatrizen . . . . .	28
2.3.3	Auswertung des Lösungsvektors . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Berechnung der Streu- und Nullinduktivitäten sowie der Kurzschlussverluste</b>	<b>33</b>
3.1	Einphasige Zwe Wicklungstransformatoren . . . . .	33
3.1.1	Ersatzschaltbild einphasiger Zwe Wicklungstransformatoren . . . . .	33
3.1.2	Numerische Bestimmung der induktiven Kopplungen . . . . .	36
3.1.3	Streuinduktivität eines einphasigen Zwe Wicklungstransformators . . . . .	40
3.1.4	Berechnung der Transformatorenverluste . . . . .	41
3.1.5	Konvergenzverhalten der berechneten Impedanzmatrix . . . . .	43
3.2	Dreiphasige Zwe Wicklungstransformatoren . . . . .	45
3.2.1	Berechnung des dreiphasigen Kurzschlussversuchs . . . . .	45
3.2.2	Nullinduktivitätsbestimmung . . . . .	47

3.3	Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 110-kV-/10-kV-Transformators . . . . .	50
3.3.1	Modellierungsstufen des 110-kV-/10-kV-Transformators . . . . .	50
3.3.2	Einphasig ermittelte Streuinduktivitäten . . . . .	52
3.3.3	Konvergenzverhalten einphasig ermittelter Streuinduktivitäten . . . . .	56
3.3.4	Bestimmung der Kurzschlussverluste bei einphasigen Modellen . . . . .	57
3.3.5	Dreiphasig ermittelte Streuinduktivitäten . . . . .	59
3.3.6	Ermittlung der Nullinduktivitäten . . . . .	61
3.3.7	Fehler durch Ausnutzung der Symmetrie . . . . .	62
3.4	Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 110-kV-/20-kV-Transformators . . . . .	63
3.4.1	Modellierungsstufen des 110-kV-/20-kV-Transformators . . . . .	63
3.4.2	Einphasig ermittelte Streuinduktivitäten . . . . .	64
3.4.3	Bestimmung der Kurzschlussverluste . . . . .	66
3.4.4	Dreiphasig ermittelte Streuinduktivitäten . . . . .	67
3.5	Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines 63-MVA-Doppelstock-Transformators . . . . .	68
3.5.1	Modellierungsstufen des Doppelstock-Transformators . . . . .	69
3.5.2	Einphasig ermittelte Streuinduktivitäten . . . . .	70
3.5.3	Dreiphasig ermittelte Streuinduktivitäten . . . . .	74
3.5.4	Ermittlung der Kurzschlussverluste . . . . .	77
3.6	Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 50-kVA-Folientransformators . . . . .	78
3.6.1	Einphasig ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen . . . . .	79
3.6.2	Dreiphasig ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen . . . . .	80
3.6.3	Berechnete Kurzschlussverluste . . . . .	81
3.7	Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 1600-kVA-Folientransformators . . . . .	81
3.7.1	Einphasig ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen . . . . .	82
3.7.2	Dreiphasig ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen . . . . .	83
3.7.3	Berechnete Kurzschlussverluste . . . . .	84
3.8	Ergebnisse der Streuinduktivitätsberechnung im Überblick . . . . .	84
4	<b>Kraftberechnung mit der Randelementmethode</b>	<b>87</b>
4.1	Kraftberechnung mit dem Lorentz-Integral . . . . .	87
4.1.1	Beispiel für die Kraftberechnung über das Lorentz-Integral . . . . .	88
4.2	Kraftberechnung über die magnetische Energie . . . . .	90
4.2.1	Beispiel für die Kraftberechnung über die magnetische Energie . . . . .	92
4.2.2	Gegenüberstellung der beiden Methoden zur Kraftberechnung . . . . .	93
4.3	Kraftberechnung am Beispiel des 110-kV-/10-kV-Transformators . . . . .	95

4.3.1	Bestimmung von Referenzwerten . . . . .	95
4.3.2	Ermittlung der Kräfte mit der Randelementmethode . . . . .	97
4.3.3	Einfluss der Wahl der Verschiebung auf die berechneten Kräfte . . . .	98
<b>5</b>	<b>Ermittlung der Frequenzgänge und Eigenformen von Leistungstransformatoren</b>	<b>101</b>
5.1	Verknüpfung von Feldberechnung und Netzberechnung . . . . .	101
5.1.1	Erweiterung des Gleichungssystems der Feldberechnung . . . . .	102
5.2	Ersetzung der Feldberechnung durch interpolierte Daten . . . . .	108
5.2.1	Kubische Spline-Interpolation . . . . .	108
5.2.2	Vergleich zwischen Frequenzgängen mit und ohne Interpolation der induktiven Kopplungen . . . . .	111
5.3	Frequenzgänge von Leistungstransformatoren . . . . .	113
5.3.1	Verteilung der Kapazitäten . . . . .	114
5.3.2	Berechnete Frequenzgänge des 110-kV-/10-kV-Transformators . . . .	118
5.4	Lokale Stromverteilung innerhalb der Wicklungen . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Erläuterung des Gauß-Algorithmus auf Blockmatrixbasis</b>	<b>139</b>
<b>B</b>	<b>Verwendete Rechner</b>	<b>146</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>147</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>149</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>152</b>
	<b>Formelzeichen</b>	<b>155</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>156</b>



# 1 Einleitung

Im Jahr 1905 hat Rogowski in [1] eine Methode zur Bestimmung der Streuinduktivitäten von Transformatoren beschrieben. Allerdings beruht sein Modellansatz auf der Annahme von Gleichstromfeldern. Darüber hinaus sind für die Wicklungsgestaltung geometrische Voraussetzungen getroffen worden, die nur eingeschränkt auf moderne Leistungstransformatoren übertragen werden können. Man kann sich in der Praxis dadurch behelfen, dass man Erfahrungsfaktoren einführt, die eine Kompensation der systematischen Fehler in der Formel von Rogowski bewirken. Jedoch bei Sonderkonstruktionen wie z.B. Doppelstock-Transformatoren ist die Rogowski-Methode praktisch nicht mehr aussagefähig.

Neben diesen einfachen analytischen Formeln bietet heute die fortgeschrittene Rechner-technik die Möglichkeit, numerische Verfahren zur Streuinduktivitätsbestimmung mittels einer Feldberechnung einzusetzen. Am Gebräuchlichsten sind dabei die Methode der finiten Elemente und die Methode der finiten Differenzen. Während sich bei diesen beiden Verfahren alle Windungen eines Transformators auch heute nicht annähernd erfassen lassen, ist dieses Ziel mit der in dieser Arbeit vorgestellten Randelementmethode selbst bei großen Leistungstransformatoren durchaus realistisch. In diesem Zusammenhang wird untersucht, wie detailliert eine Modellierung sein muss, um hinreichend genaue Ergebnisse zu liefern.

Als Grundlage für die Berechnungen mit der Randelementmethode verwendet man wie bei Rogowski ein zweidimensionales Transformatorenmodell, in dem die Transformatorwindungen abgewickelt werden. Sogar dieses relativ einfache zweidimensionale Modell eignet sich bereits zur Berechnung der magnetischen Felder und liefert wertvolle Aussagen. Mathematisch wird das Feldproblem durch eine Randwertaufgabe beschrieben, die mit der Randelementmethode gelöst wird. Dabei wird das Vektorpotential auf den Rändern diskretisiert. Bei realen Nachbildungen ergeben sich große lineare Gleichungssysteme, die zu mehr als der Hälfte besetzt sind. Gerade für diese Aufgabe ist der kontinuierliche Zuwachs an Rechenleistung in der Vergangenheit von besonderer Bedeutung.

Aus der Lösung solcher großen Gleichungssysteme ergeben sich in einfacher Weise die induktiven Kopplungen der Transformatorwindungen. Diese wiederum ermöglichen es, die Streuinduktivitäten ohne Erfahrungsfaktoren allein aus den Entwurfsparametern zu bestimmen. In ähnlicher Weise sind auch Nullinduktivitäten und Kurzschlussverluste, jedoch nicht die Eisenverluste, berechenbar. Neben zwei Transformatoren herkömmlicher Bauart werden auch ein Doppelstock-Transformator sowie zwei Folientransformatoren untersucht. Dabei reicht der Leistungsbereich vom 50-kVA-Transformator im Praktikumsbetrieb bis zum 63-MVA-Leistungstransformator.

Als Erweiterung der Streuinduktivitätsberechnung wird eine Kraftberechnung für beliebige Wicklungsgeometrien diskutiert, die ohne eine numerische Integration über die Leiterquerschnitte auskommt. Auch hier werden mit der Randelementmethode Konstruktionen untersucht, bei denen auf Rogowski basierende Rechnungen ohne Erfahrungswerte nicht mehr angewendet werden können.

Durch die Verallgemeinerung des Feldproblems zu einem Netzproblem unter Hinzunahme von kapazitiven Kopplungen zwischen den Leitern können Frequenzgänge von Transformatorenmodellen mit realistischen Induktivitäten und Kapazitäten bei realitätsnahen Windungszahlen ermittelt werden. Diese Frequenzgänge gestatten es, die Eigenfrequenzen der Modelle zu bestimmen. Weiterhin sind Einblicke in Vorgänge innerhalb der Wicklungen bei den Eigenfrequenzen möglich. Eine Analyse der Stromverteilungen in den Windungen soll

---

die vom magnetischen Feldbild her bekannten Eigenformen auch in der Stromverteilung aufzeigen. Dabei können diese Eigenformen bis in den Frequenzbereich untersucht werden, in dem einzelne Windungen gegeneinander schwingen.

In der vorliegenden Arbeit werden die heute verfügbaren Rechner eingesetzt, um die in [2] beschriebene Randelementmethode praxisnah anzuwenden. Dabei werden die in [3] dargestellten theoretischen Grundlagen zur Berechnung von Streuinduktivitäten und Frequenzgängen angewendet. Während in [3] die Rechnungen noch auf kleine Modelle beschränkt bleiben, können nun fast vollständige Transformatorenmodelle untersucht werden, um die Möglichkeiten und Grenzen des zweidimensionalen Modells herauszuarbeiten. Darüberhinaus kommen erweiterte Berechnungsmöglichkeiten wie die Berechnung der Kurzschlussverluste, der Nullinduktivitäten oder der Wicklungskräfte hinzu. Zunächst wird jedoch auf die Feldberechnung eingegangen.

## 2 Lösung eines Randwertproblems mit der Randelementmethode

In dieser Arbeit werden die erforderlichen Feldberechnungen mit der Randelementmethode (englisch *boundary element method*) – wie in [2] beschrieben – durchgeführt. Diesem Verfahren liegt ein Randwertproblem zu Grunde, welches zunächst erläutert wird. Anschließend wird die Lösung des Randwertproblems durch Diskretisierung der Leiterränder in Randelemente betrachtet. Es ergibt sich dabei ein lineares Gleichungssystem, das mit einem für große Blockmatrizen angepassten Gauß-Algorithmus gelöst wird. Nach der Erläuterung dieses Verfahrens werden die Möglichkeiten diskutiert, die erhaltene Lösung auszuwerten.

### 2.1 Formulierung des Randwertproblems

Zunächst wird gezeigt, dass sich das Randwertproblem aus einer Vielzahl von Helmholtz'schen Differentialgleichungen und einer Laplaceschen Differentialgleichung zusammensetzt. Zu verknüpfen sind diese Gleichungen durch Randbedingungen an den Grenzflächen und im Unendlichen. Grundlage dieser Überlegungen ist das im Folgenden erläuterte Modell eines Transformators.

#### 2.1.1 Beschreibung des verwendeten zweidimensionalen Modells

In [3] ist die Randelementmethode für das vorliegende Problem spezialisiert worden. Prinzipiell wird es in Querschnittsflächen von in  $z$ -Richtung unendlich langen Leitern in der  $xy$ -Ebene modelliert. Solche Leiter weisen aus Gründen der Symmetrie nur parallelebene magnetische Felder auf, die nicht von der  $z$ -Koordinate abhängen. Sie liegen nur in der  $xy$ -Ebene; daher kann das ganze Problem – Geometrie und Felder – allein in dieser Ebene beschrieben werden. Ein solches Modell kann naturgemäß langgezogene Leiter wie z.B. Leitungen nachbilden, aber es eignet sich auch zur Darstellung von Transformatoren oder Wandlern.

Diese Betriebsmittel weisen einen Eisenkern auf, dessen Schenkel wesentlich das magnetische Feld prägen. Der Schenkel mit den konzentrisch um diesen gewickelten Windungen sowie die entstehenden Felder bilden ein weitestgehend rotationssymmetrisches System, das man sich – wie in Abbildung 2.1 veranschaulicht – abgewickelt vorstellen kann. Jede Windung wird vorne und hinten durchtrennt. Beide Teile werden zu einem geraden Leiter in  $z$ -Richtung abgewickelt. Betrachtet wird nur dessen Schnittfläche mit der  $xy$ -Ebene. Mit der Abwicklung überführt man das dreidimensionale rotationssymmetrische Feldproblem in ein zweidimensionales parallelebeines Problem. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden die diskutierten Ergebnisse zeigen, dass dieser Schritt bei Leistungstransformatoren eine zulässige Näherung darstellt.

Wie schon angedeutet sind von der Geometrie der Leiter nur die Querschnitte in der  $xy$ -Ebene relevant; diese sollen stückweise glatt berandet sein. Für reale Leiter stellt dies keine Einschränkung dar. Es werden insgesamt  $N$  von solchen Leiterquerschnitten modelliert. Bei einem Transformator muss man neben den Windungen auch den Eisenkern darstellen. Die physikalischen Eigenschaften eines jeden Leiters  $n$  mit  $1 \leq n \leq N$  werden durch seine elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_n$  und seine relative magnetische Permeabilität  $\mu_{rn}$  festgelegt, die über

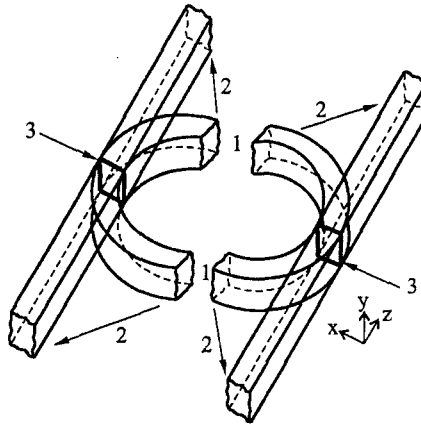


Bild 2.1: Abwicklung einer konzentrisch gewickelten Winding. (1) Auftrennen der Winding, (2) Abwicklung, (3) Querschnittsfläche in der  $xy$ -Ebene.

die gesamte Querschnittsfläche als konstant angenommen werden. Beide Größen müssen endliche Werte annehmen.

Neben den Leitern bestehen Transformatoren natürlich auch noch aus weiteren Materialien, die sich zwischen den Leitern befinden und meistens zur Isolation dienen. Die wesentlichen Isolatoren sind in diesem Fall Öl und Kunststoffe sowie auch Luft. Allen diesen Materialien ist gemeinsam, dass sie keinen Einfluss auf das magnetische Feld ausüben. Sie weisen eine relative Permeabilität von  $\mu_r = 1$  auf. Daneben ist ihre elektrische Leitfähigkeit als Isolator durch  $\sigma = 0$  gegeben. Diese gemeinsamen Eigenschaften erlauben es, die Gruppe der nicht-magnetischen Isolatoren wie ein Material zu behandeln. Deshalb wird hier nur noch undifferenziert von Isolierung gesprochen.

Eine Einschränkung des hier verwendeten Modells besteht darin, dass sich keine zwei Leiterquerschnitte berühren dürfen. Zwischen ihnen muss sich immer ein endlicher Zwischenraum aus einer Isolierung befinden. Dieses entspricht bei Leistungstransformatoren den tatsächlichen Verhältnissen und stellt damit keine Beeinträchtigung dar. Andererseits dürfen sich die verschiedenen Isolationsmaterialien direkt berühren, weil sie – im Hinblick auf das untersuchte Feldproblem – identische Eigenschaften aufweisen. So bildet z.B. eine Kunststoffisolierung um einen Leiter mit dem sie umgebenden Öl eine Fläche.

Zu beachten ist, dass die modellierten Leiter durchaus Hohlräume – wie z.B. die Fenster eines Eisenkerns – aufweisen können. In den Fenstern dürfen weitere Leiter liegen, die wiederum Fenster haben können. So lassen sich auch Transformatoren mit einem Kessel nachbilden (siehe Bild 2.2). Dieses recht grobe Modell besteht aus drei Lagen für die Unterspannungswicklung, 56 Scheiben in der Oberspannungswicklung und je einer Lage für Grob- und Feinstufenwicklung. Der Kessel ist gestrichelt angedeutet.

Nachdem die Geometrie und die physikalischen Eigenschaften des Modells festgelegt worden sind, muss noch die Anregung definiert werden. In jeden Leiter  $n$  soll ein harmonischer Strom mit der Amplitude  $I_n$  eingeprägt werden. Die Frequenz  $f$  ist bei allen Strömen identisch. Dieser Strom ist als integrale Größe über die gesamte Leiterfläche zu verstehen. Allerdings

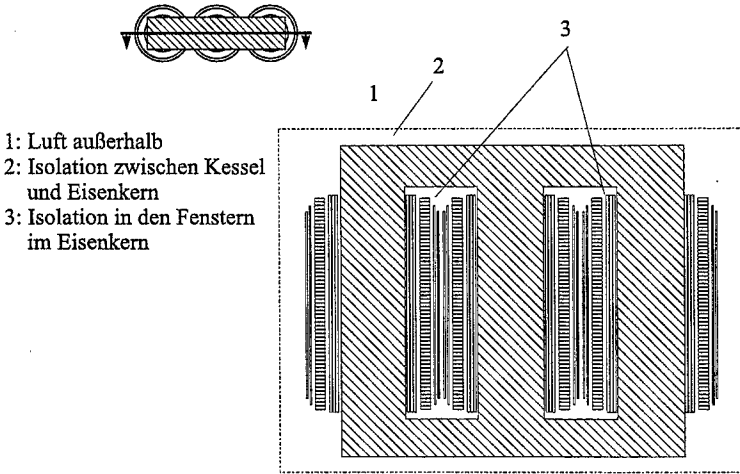


Bild 2.2: Darstellung der Querschnittsebene eines 110-kV-/10-kV-Transformators. Die Bereiche 1,2,3 kennzeichnen Nichtleiter.

weicht durch die ebenfalls zu berücksichtigenden Wirbelströme die lokale Stromverteilung von der mittleren Stromdichte im Leiter ab und ist noch zu berechnen. Reine Oberflächenströme an den Rändern der Leiter sind nicht zugelassen.

Nur prinzipiell stimmt das hier beschriebene Modell mit dem von Rogowski in [1] eingeschlagenen Weg überein. So sind die strengen Einschränkungen Rogowskis bezüglich Form und Lage der Windungen aufgehoben. Es sind auch deutlich von Rogowskis Geometrie abweichende Konstruktionen wie Bandtransformatoren oder Doppelstock-Transformatoren berechenbar. Weiterhin kann im Gegensatz zu Rogowski ein Kessel berücksichtigt werden. Zuletzt ist die Wahl der Stromeinprägung freigestellt. Es müssen nicht alle Leiter tatsächlich mit Strom beaufschlagt sein.

Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen wird nun das bereits erwähnte Randwertproblem formuliert. Dazu werden Helmholtzsche Differentialgleichungen sowie eine Laplacesche Differentialgleichung abgeleitet.

### 2.1.2 Ableitung der Helmholtzschen Differentialgleichungen

Bekanntlich bilden das Faradaysche Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad (2.1)$$

das Amperesche Durchflutungsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}, \quad (2.2)$$

das Coulombsche Gesetz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.3)$$

und

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.4)$$

die Maxwellschen Gleichungen. Darin bedeuten  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\vec{H}$  die magnetische Feldstärke,  $\vec{B}$  die magnetische Induktion sowie  $\vec{S}$  die elektrische Stromdichte. Zusätzlich werden für die Feldberechnung das ohmsche Gesetz

$$\vec{S} = \sigma \vec{E} \quad (2.5)$$

und die Materialgleichung

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.6)$$

mit der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$  und der magnetischen Permeabilität  $\mu$  verwendet. Außerdem werden in dieser Arbeit nur Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit betrachtet, so dass  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \hat{=} j\omega \vec{D}$  gilt. Die Kreisfrequenz  $\omega$  soll klein genug sein, damit  $j\omega \vec{D}$  gegenüber  $\vec{S}$  vernachlässigt werden kann. Deshalb muss im Folgenden die Verschiebungsstromdichte  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$  aus Gleichung (2.2) nicht weiter berücksichtigt werden. Das Amperesche Durchflutungsgesetz geht dann über in

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{S}. \quad (2.7)$$

Mit der üblichen Definition

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.8)$$

ergibt sich die magnetische Induktion  $\vec{B}$  aus dem Vektorpotential  $\vec{A}$ . Die Existenz eines Vektorpotentials, das Gleichung (2.8) erfüllt, ist durch die Maxwellsche Gleichung (2.4) gewährleistet. Aus dem Vektorpotential  $\vec{A}$  können alle weiteren Feldgrößen bestimmt werden. Mit der Beziehung (2.1) folgt durch Einsetzen der Definition (2.8)

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \quad (2.9)$$

Wegen der harmonischen Zeitabhängigkeit sind alle Größen zeitlich beliebig oft differenzierbar. Die räumlichen Ableitungen von  $\vec{A}$  sind wegen der Zusammenhänge (2.8) und (2.1) mindestens bis zur zweiten Ableitung gesichert. Bei der somit vorhandenen zweimaligen Differenzierbarkeit von  $\vec{A}$  dürfen die Differentiationen vertauscht werden:

$$0 = \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = \vec{\nabla} \times (\vec{E} + j\omega \vec{A}). \quad (2.10)$$

Nach [4] impliziert diese Eigenschaft die Existenz eines skalaren Potentials  $\phi$ , für dessen Gradienten  $\vec{\nabla}\phi$

$$\vec{\nabla}\phi(x, y, z) = -\vec{E}(x, y) - j\omega \vec{A}(x, y) \quad (2.11)$$

gilt. Ersetzt man mit Gleichung (2.11)  $\vec{E}$  im ohmschen Gesetz (2.5), so erhält man

$$\vec{S} = \sigma \vec{E} = -\sigma (\mathbf{j}\omega \vec{A} + \vec{\nabla} \phi). \quad (2.12)$$

Schließlich eliminiert man damit die Stromdichte  $\vec{S}$  aus der Poissonschen Differentialgleichung der Magnetostatik (vgl. [4]):

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{S} = \mu \sigma (\mathbf{j}\omega \vec{A} + \vec{\nabla} \phi). \quad (2.13)$$

In dieser Arbeit werden allein ebene Felder in der  $xy$ -Ebene betrachtet. Aus Symmetriegründen kann man das Vektorpotential  $\vec{A}$  in der Form

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

ansetzen. Es genügt sowohl der vierten Maxwellschen Gleichung (2.4) als auch der Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (2.15)$$

wie u.a. in [3] gezeigt ist. Für eine zweidimensionale Geometrie besitzt neben dem Vektorpotential  $\vec{A}$  auch das elektrische Feld  $\vec{E}$  nur eine  $z$ -Komponente. Somit werden die  $x$ - und die  $y$ -Komponenten des Gradienten (2.11) identisch Null, während die  $z$ -Komponente nur noch von  $x$  und  $y$  abhängt. Damit muss die zweite Ableitung in  $z$ -Richtung auch verschwinden, so dass die  $z$ -Komponente des Gradienten  $\vec{\nabla} \phi$  mit einer noch zu bestimmenden Konstanten  $K$  als

$$\vec{\nabla} \phi = \mathbf{j}\omega K \quad (2.16)$$

geschrieben werden kann. Durch diese Konstante ergibt sich die  $z$ -Komponente der Differentialgleichung (2.13) zu

$$\Delta A_z(x, y) - \mathbf{j}\omega \mu \sigma (A_z(x, y) + K) = 0. \quad (2.17)$$

Berücksichtigt man  $\Delta K = 0$ , so gilt

$$(\Delta - \mathbf{j}\omega \mu \sigma) (A_z(x, y) + K) = 0. \quad (2.18)$$

In dieser Form entspricht die Gleichung einer Helmholtzschen Differentialgleichung. Sie gilt jedoch nur innerhalb eines Mediums mit konstantem  $\mu$  und  $\sigma$ . Bei dem hier betrachteten Modell hat man verschiedene Medien mit unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften. Man muss daher jedem Leiter eine eigene Konstante  $K_n$  zuweisen. Damit ergibt sich abschließend für die  $n$ -te Leiterquerschnittsfläche die gültige Helmholtzsche Differentialgleichung

$$(\Delta - \mathbf{j}\omega \mu_n \sigma_n) (A_z(x, y) + K_n) = 0 \quad \text{für } 1 \leq n \leq N \quad (2.19)$$

## 2.1 Formulierung des Randwertproblems

mit der Anzahl der Leiter  $N$ . Außerhalb der Leiter, also in der umgebenden Isolierung, folgt aus Gleichung (2.19) mit der Isolationsbedingung  $\sigma = 0$  der Spezialfall einer Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta \underline{A}_z(x, y) = 0. \quad (2.20)$$

Den gesamten Raum der Isolierung beschreibt nur eine einzige Laplacesche Differentialgleichung. Daher werden für das aus  $N$  Leitern bestehende Problem eine Laplacesche und  $N$  Helmholtzsche Differentialgleichungen benötigt. Die Differentialgleichungen müssen durch die nachfolgenden Stetigkeitsbedingungen verknüpft werden. Bei diesen Bedingungen handelt es sich im mathematischen Sinn um Randbedingungen.

### 2.1.3 Formulierung der Randbedingungen

Als erste Stetigkeitsbedingung soll das Verhalten der Tangentialkomponente  $\underline{\vec{H}}_t$  der magnetischen Feldstärke  $\underline{\vec{H}}$  beim Übergang von einem Medium mit der Permeabilität  $\mu_1$  in ein anderes mit der Permeabilität  $\mu_2$  untersucht werden. Gemäß [4] erfolgt dieser Übergang stetig, sofern in der Grenzfläche – wie vorausgesetzt – keine Flächenströme fließen. Mathematisch kann der Sachverhalt durch

$$0 = (\underline{\vec{H}}_2 - \underline{\vec{H}}_1) \times \vec{n} \quad (2.21)$$

beschrieben werden, wobei  $\vec{n}$  den Normalenvektor der Grenzfläche darstellt. In dem hier verwendeten zweidimensionalen Modell sind die betrachteten Grenzflächen zwischen zwei Medien in  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnt (vgl. Abbildung 2.1), so dass der Normalenvektor  $\vec{n}$  immer senkrecht zur  $z$ -Richtung stehen muss. In diesem Fall ergibt sich ein Normalenvektor der Form

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Mit  $\underline{\vec{H}}_i$  wird die magnetische Feldstärke an einem Punkt  $(x_i, y_i)$  bezeichnet. Dieser Punkt liegt im Medium  $i$  so dicht an der Grenzfläche, dass die Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  nur einen infinitesimal kleinen Abstand voneinander aufweisen. An diesen Punkten ergibt sich aus dem Bisherigen die Größe der magnetischen Feldstärke zu

$$\begin{aligned} \underline{\vec{H}}_i &\stackrel{(2.6)}{=} \frac{1}{\mu_i} \underline{\vec{B}}_i \stackrel{(2.8)}{=} \frac{1}{\mu_i} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{A}}(x_i, y_i) \stackrel{(2.14)}{=} \frac{1}{\mu_i} \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{A}_z(x_i, y_i) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\mu_i} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \underline{A}_z(x_i, y_i) \\ -\frac{\partial}{\partial x} \underline{A}_z(x_i, y_i) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Setzt man die so bestimmten Feldstärken  $\underline{\vec{H}}_1$  und  $\underline{\vec{H}}_2$  in die Stetigkeitsbedingung (2.21) ein, folgt



$$\begin{aligned}
 0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial y}(x_2, y_2) - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial y}(x_1, y_1) \\ -\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial x}(x_2, y_2) + \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial x}(x_1, y_1) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0, 0, \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial x}(x_2, y_2) - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial x}(x_1, y_1) \right) \cdot n_x \\ + \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial y}(x_2, y_2) - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial y}(x_1, y_1) \right) \cdot n_y \end{pmatrix}. \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

Mit der Schreibweise  $n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}}$  für die Ableitung in Normalenrichtung lässt sich die  $z$ -Komponente dieser Gleichung zu

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial \vec{n}}(x_1, y_1) = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial \vec{n}}(x_2, y_2) \quad (2.25)$$

umordnen. Das Ergebnis (2.25) stellt die erste Randbedingung dar, mit denen die Differentialgleichungen (2.19) und (2.20) an den Grenzflächen zweier Medien zu verknüpfen sind.

Eine zweite Randbedingung erhält man aus der Stetigkeit der Normalkomponente  $\vec{B}_n$  der magnetischen Induktion  $\vec{B}$ . In [4] wird diese Bedingung mathematisch als

$$0 = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} \quad (2.26)$$

beschrieben. Wiederum ist  $\vec{n}$  der Normalenvektor der Grenzfläche zwischen den beiden Medien, während  $\vec{B}_i$  die magnetische Induktion an dem Punkt  $(x_i, y_i)$  im Medium  $i$  darstellt. Bezüglich des Abstandes der Punkte gilt das oben Gesagte.

Nun wählt man zwei Flächen  $O_i$  mit  $1 \leq i \leq 2$  parallel zur Grenzfläche der beiden Medien. Dabei soll die Fläche  $O_i$  im Medium  $i$  liegen und den Punkt  $(x_i, y_i)$  enthalten. Beide Flächen sollen ansonsten gleiche Form und Größe haben, so als wären sie an der Grenzfläche gespiegelt. Diese Flächen weisen somit eine Ausdehnung in  $z$ -Richtung auf. Aufgrund von Gleichung (2.26) ist der magnetische Fluss durch die beiden Flächen identisch:

$$\int_{O_1} \vec{B} \cdot \vec{n} dO = \int_{O_2} \vec{B} \cdot \vec{n} dO. \quad (2.27)$$

Mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes kann das Flächenintegral des magnetischen Flusses in ein Integral entlang des Randes  $\partial O_i$  überführt werden. Es ergibt sich

$$\int_{O_i} \vec{B} \cdot \vec{n} dO \stackrel{(2.8)}{=} \int_{O_i} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dO \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial O_i} \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (2.28)$$

Lässt man nun die Flächen  $O_i$  sehr klein werden, so kann man das Vektorpotential  $\vec{A}$  in ihnen als konstant ansehen. Dann ist es möglich, das Vektorpotential vor das Integral zu ziehen. Es bleibt

$$\int_{O_i} \vec{B} \cdot \vec{n} dO = \vec{A}_z(x_i, y_i) \cdot U_i \quad (2.29)$$

## 2.1 Formulierung des Randwertproblems

mit dem Umfang  $U_i$  des Randes  $\partial O_i$

$$U_i = \oint_{\partial O_i} 1 \, dl. \quad (2.30)$$

Aus  $U_1 = U_2$  folgt wegen Gleichung (2.27) die zweite Randbedingung zur Verknüpfung der feldbeschreibenden Differentialgleichungen

$$\underline{A}_z(x_1, y_1) = \underline{A}_z(x_2, y_2). \quad (2.31)$$

Weitergehende Aussagen lassen sich mit Gleichung (2.11) ableiten. Wie in [2] wird die elektrische Feldstärke in einen eingepprägten Anteil

$$\underline{\vec{E}}_{\text{ein}} = -\underline{\vec{\nabla}}\phi \quad (2.32)$$

und in einen induzierten Anteil

$$\underline{\vec{E}}_{\text{ind}} = -j\omega \cdot \underline{\vec{A}} \quad (2.33)$$

zerlegt. Damit geht nach Gleichung (2.31) auch die Tangentialkomponente des induzierten Anteils  $\underline{\vec{E}}_{\text{ind}}$  stetig von einem Leiter in die Isolierung über. An dieser Stelle kann das elektrische Feld außerhalb der Leiterquerschnitte durch eine nachgeschaltete Berechnung gemäß [5] ermittelt werden.

Im Weiteren gilt es noch, das Vektorpotential im Unendlichen zu untersuchen. Dazu betrachtet man das Vektorpotential jenseits einer gedachten Kreislinie mit Mittelpunkt im Ursprung und einem so großen Radius, dass alle ebenen  $N$  Leiterquerschnittsflächen im Inneren des Kreises liegen. Diese Kreislinie wird Fernkreisrand genannt. Da dort keine leitenden Querschnitte vorhanden sind, gilt die Laplacesche Differentialgleichung (2.20). Unter der Voraussetzung, dass die Summe aller Stromeinprägungen in die Leiter verschwindet bzw.

$$\sum_{k=1}^N \underline{I}_k = 0 \quad (2.34)$$

gilt, wird in [3] das Vektorpotential auf dem Rand eines hinreichend großen Fernkreises mit

$$\underline{A}_z(x, y) = 0 \quad (2.35)$$

eindeutig festgelegt. Vertiefende Betrachtungen ergeben sich, wenn man die Laplacesche Differentialgleichung in Polarkoordinaten darstellt. Die daraus folgende Reihenentwicklung für das Vektorpotential  $\underline{A}_z$  konvergiert mit zunehmendem Radius gegen Null.

Neben den bisher aufgestellten Differentialgleichungen ist mit den Randbedingungen im Unendlichen sowie an den Grenzflächen unterschiedlicher Medien das Randwertproblem spezifiziert. Um es zu vervollständigen, muss noch die Stromeinprägung in das Problem einbezogen werden, bevor der Lösungsweg beschrieben werden kann.

### 2.1.4 Berücksichtigung der Stromeinprägungen

In jeden der dargestellten  $N$  ebenen Leiter kann ein beliebiger Strom  $I_n$  eingepreßt werden, solange die Nebenbedingung (2.34) eingehalten wird. Dieser Strom kann aus dem Ampereschen Durchflutungsgesetz (2.7) in integraler Form berechnet werden:

$$I_n = \int_{V_n} \underline{S}_z(x, y) \, dx \, dy = \int_{V_n} \left( \vec{\nabla} \times \underline{\vec{H}}(x, y) \right)_z \, dx \, dy. \quad (2.36)$$

$V_n$  stellt darin die Querschnittsfläche des Leiters  $n$  in der  $xy$ -Ebene dar. Der Index  $z$  bezieht sich auf die  $z$ -Komponente des entsprechenden Vektors. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die eingepreßten Ströme allein in  $z$ -Richtung fließen. Andersartige Stromeinprägungen sind aufgrund der Geometrie – unendlich lange Leiter in  $z$ -Richtung – auch nicht möglich.

Mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes lässt sich das Integral über eine Leiterquerschnittsfläche  $V_n$  als ein Integral entlang des Randes  $\partial V_n$  schreiben als

$$I_n = \int_{V_n} \left( \vec{\nabla} \times \underline{\vec{H}}(x, y) \right)_z \, dx \, dy = \int_{\partial V_n} \left( \vec{n} \times \underline{\vec{H}}(x, y) \right)_z \, ds. \quad (2.37)$$

Wie in Gleichung (2.24) ergibt sich  $\vec{n} \times \underline{\vec{H}} = -\frac{1}{\mu_0 \mu_{rn}} \frac{\partial}{\partial n} A_z$ . Abschließend folgt daraus

$$-\mu_0 \mu_{rn} I_n = \int_{\partial V_n} \frac{\partial}{\partial n} A_z \, ds \quad (2.38)$$

für die Stromeinprägung in den Leiter  $n$ . Über diese Beziehung ist die bisher fehlende Anregung in das Randwertproblem vollständig einbezogen worden. Im Folgenden wird es noch einmal zusammenhängend dargestellt.

### 2.1.5 Überblick über das behandelte Randwertproblem

Bei dem hier betrachteten Randwertproblem werden die Querschnittsflächen von  $N$  Leitern in der  $xy$ -Ebene betrachtet. Diese Querschnittsflächen besitzen einen stückweise glatten Rand, d.h. der Rand ist als stückweise stetig differenzierbarer Weg zu parametrisieren. Die Leiter, die sich nicht berühren dürfen, sind von einem nicht-leitenden Medium – der Isolierung – mit einer relativen Permeabilität von  $\mu_r = 1$  umgeben. Weiterhin weist jeder Leiter  $n$  homogen über seine gesamte Querschnittsfläche die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_n$  und die relative Permeabilität  $\mu_{rn}$  auf. In die Leiter sind harmonisch von der Zeit abhängige Ströme eingepreßt, die eine einheitliche beliebige Kreisfrequenz  $\omega > 0$  aufweisen. Ihre Amplitude  $I_n$  ist beliebig, solange

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0 \quad (2.39)$$

erfüllt wird.

Zur Lösung des ebenen Feldproblems soll das Vektorpotential  $\underline{A}_z$  berechnet werden. Für dieses Vektorpotential gilt innerhalb eines jeden Leiters  $n$  die Helmholtzsche Differentialgleichung

$$(\Delta - j\omega\mu_0\mu_{rn}\sigma_n)(\underline{A}_z(x, y) + \underline{K}_n) = 0 \quad \text{für } 1 \leq n \leq N. \quad (2.40)$$

Andererseits ist in der Isolierung zwischen den Leitern die Laplacesche Differentialgleichung

$$\Delta \underline{A}_z(x, y) = 0. \quad (2.41)$$

anzuwenden. An den Grenzflächen zwischen einem Leiter und der Isolierung geht das Vektorpotential  $\underline{A}_z$  stetig gemäß

$$\underline{A}_z(x_0, y_0) = \underline{A}_z(x_n, y_n) \quad (2.42)$$

über.  $(x_0, y_0)$  stellt dabei einen Punkt in der Isolierung,  $(x_n, y_n)$  einen Punkt im Leiter  $n$  dar. Beide Punkte liegen dicht an der Grenzfläche und weisen nur einen infinitesimalen Abstand voneinander auf. Andere Grenzflächen als solche zwischen Leiter und Isolierung können bei dem hier betrachteten Modell wie oben gefordert nicht auftreten. An solchen Grenzflächen springt die Normalenableitung des Vektorpotentials im Gegensatz dazu im umgekehrten Verhältnis der relativen Permeabilitäten

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_z(x_0, y_0) = \frac{1}{\mu_0\mu_{rn}} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_z(x_n, y_n). \quad (2.43)$$

Dabei wird das Vektorpotential im Unendlichen durch

$$\underline{A}_z(x, y) = 0 \quad (2.44)$$

definiert.

Angeregt wird die Anordnung aus ebenen Leitern durch eine Stromeinprägung. Im Leiter  $n$  ist der eingeprägte Strom mit dem Vektorpotential durch

$$-\mu_0\mu_{rn}I_n = \int_{\partial V_n} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_z ds \quad (2.45)$$

verknüpft. Das so formulierte Randwertproblem soll nun gelöst werden. Mit Hilfe der Greenschen Funktionen und des Greenschen Satzes können Randintegralgleichungen abgeleitet werden, die sich für eine Diskretisierung eignen.

## 2.2 Numerische Lösung des Randwertproblems

In der bisherigen Form eignet sich das Randwertproblem nur bedingt für eine numerische Lösung. Eine solche Vielzahl gekoppelter partieller Differentialgleichungen in ausreichender Genauigkeit und für einen großen Feldraum zu lösen, ist praktisch kaum durchführbar. Auch hier führt der oft verwendete Approximationsschritt der Diskretisierung zu einer Vereinfachung. Auf die Greenschen Funktionen der auftretenden Differentialoperatoren wird der Greensche Satz angewendet. Dabei entstehen Randintegralgleichungen für das Vektorpotential, die durch Summen über kleine Randelemente diskretisiert werden. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das als Lösung das Vektorpotential auf den Rändern liefert.

### 2.2.1 Bestimmung der Greenschen Funktionen der verwendeten Differentialoperatoren

Das in Abschnitt 2.1.5 zusammenfassend formulierte Randwertproblem enthält zwei verschiedene Differentialgleichungstypen: Zum einen die Helmholtzschen Differentialgleichungen (2.40), zum anderen die Laplacesche Differentialgleichung (2.41). Da die gesuchte Lösung, das Vektorpotential  $\underline{A}_z$ , nur eine Funktion der Variablen  $x$  und  $y$  ist, kann die Differentiation nach  $z$  in diesen Differentialgleichungen komplett vernachlässigt werden. Man kann die zugehörigen Differentialoperatoren somit als zweidimensionale Operatoren auffassen. Zunächst werden die Greenschen Funktionen für den Helmholtzschen Differentialoperator  $\Delta - j\beta^2$  mit einem positiven reellen  $\beta = \sqrt{\omega\sigma\mu}$  und dem Laplaceschen Differentialoperator  $\Delta$  bestimmt. Die Greensche Funktion des Laplace-Operators muss die Differentialgleichung

$$\Delta G_{(x,y)}^0(\xi, \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta) \quad (2.46)$$

erfüllen. Dabei ist  $\delta$  die bekannte Diracsche Deltafunktion mit der Eigenschaft

$$\delta(x, y) = 0 \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0). \quad (2.47)$$

Weiterhin muss das Integral

$$\int_V f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = \begin{cases} f(x, y), & \text{für } (x, y) \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.48)$$

existieren. Wie in [6] gezeigt, erfüllt

$$G_{(x,y)}^0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \right) \quad (2.49)$$

die Gleichung (2.46). Aufgrund ihrer geschlossenen Form ist die Greensche Funktion des Laplace-Operators  $G_{(x,y)}^0(\xi, \eta)$  einer numerischen Auswertung leicht zugänglich. Ebenso können Integrale über diese Funktion oder ihre Ableitung analytisch bestimmt werden und sind damit numerisch ebenfalls schnell und genau zu bestimmen.

Im Gegensatz dazu kann die Greensche Funktion  $\underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta)$  des zweidimensionalen Helmholtz-Operators  $\Delta - j\beta^2$  nicht mehr geschlossen angegeben werden. Nach [7] wird die zugehörige Differentialgleichung

$$(\Delta - j\beta^2) \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta) \quad (2.50)$$

durch

$$\underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} (\ker + j \operatorname{kei}) \left( \beta \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \right) \quad (2.51)$$

gelöst. Dabei sind mit  $(\ker + j \operatorname{kei})(x)$  der Real- und der Imaginärteil der modifizierten Besselfunktionen bezeichnet, die in der Literatur auch Kelvinfunktionen genannt werden. Es gilt

$$(\ker + j \operatorname{kei})(x) = \ker(x) + j \operatorname{kei}(x) = j \frac{\pi}{2} \left( \mathcal{J}_0(x\sqrt{-j}) + j \mathcal{N}_0(x\sqrt{-j}) \right) \quad (2.52)$$

(vgl. [8]). Verwendet man bekannte Reihendarstellungen für die Besselsche Funktion  $J_0$  und die Neumannsche Funktion  $N_0$ , so kann man mit den sich daraus ergebenden Reihen die Kelvinfunktionen und letztlich auch die Greensche Funktion  $\underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta)$  numerisch bestimmen. Abgebrochene Reihendarstellungen der Greenschen Funktion bzw. ihrer Ableitung sind gliedweise analytisch integrierbar, so dass auch hier alle Integrale numerisch mit vertretbarem Aufwand gewonnen werden können. Im Gegensatz zu [3] werden die Reihenentwicklungen erst später abgebrochen, weil die dafür benötigte zusätzliche Rechenzeit bezogen auf die Gesamtrechenzeit nicht ins Gewicht fällt. Die Methode der gliedweisen Integration ist deutlich schneller und genauer als eine numerische Integration, bei der zahlreiche Funktionswerte der zu integrierenden Funktion gebildet werden müssen.

Mit dem Greenschen Satz können durch die Greenschen Funktionen des Helmholtz- und des Laplace-Operators auf einfache Weise Randintegralgleichungen abgeleitet werden, die das Vektorpotential an einer beliebigen Stelle mit dem Vektorpotential auf dem Rand eines Leiters verknüpfen.

### 2.2.2 Anwendung des Greenschen Satzes zur Ermittlung von Randintegralgleichungen

Für einen ebenen Leiter  $n$  mit der Querschnittsfläche  $V_n$  in der  $xy$ -Ebene ergibt sich mit  $\beta = \sqrt{\omega\sigma_n\mu_0\mu_{rn}}$  die Helmholtzsche Differentialgleichung (2.40) zu

$$(\Delta - j\beta^2)(\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) = 0, \quad (2.53)$$

wobei nun  $(\xi, \eta)$  als Ortskoordinaten gewählt worden sind. Somit gilt

$$\begin{aligned} & (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \cdot \delta(x - \xi, y - \eta) \\ \stackrel{(2.50)}{=} & (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \cdot (\Delta - j\beta^2) \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \\ = & (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \Delta \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) - (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \cdot j\beta^2 \cdot \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \\ \stackrel{(2.53)}{=} & (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \Delta \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) - \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \Delta (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Eine Integration dieser Gleichung über die Leiterquerschnittsfläche  $V_n$  führt für einen Punkt  $(x, y) \in V_n$  wegen Gleichung (2.48) auf die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \underline{A}_z(x, y) + \underline{K}_n = \int_{V_n} & \left( (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \Delta \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \right. \\ & \left. - \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \Delta (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \right) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.55)$$

die das Vektorpotential  $\underline{A}_z(x, y)$  an einer beliebigen Stelle in der Leiterquerschnittsfläche  $V_n$  mit den Werten des Vektorpotentials überall in  $V_n$  verknüpft. Verwendet man weiterhin den Greenschen Satz

$$\begin{aligned}
 & \int_V (\Phi(\xi, \eta) \cdot \Delta \Psi(\xi, \eta) - \Psi(\xi, \eta) \cdot \Delta \Phi(\xi, \eta)) \, d\xi \, d\eta \\
 &= \int_{\partial V} \left( \Phi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Psi(\xi, \eta) - \Psi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Phi(\xi, \eta) \right) \, ds(\xi, \eta)
 \end{aligned} \quad (2.56)$$

mit den zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $\Phi(\xi, \eta)$  und  $\Psi(\xi, \eta)$ , kann man Gleichung (2.55) weiter vereinfachen. Dabei stellt  $ds(\xi, \eta)$  ein Wegelement längs des Randes  $\partial V$  der Fläche  $V$  dar. Mit  $\Phi(\xi, \eta) = \underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n$  und  $\Psi(\xi, \eta) = \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta)$  folgt die neue Randintegralgleichung

$$\begin{aligned}
 \underline{A}_z(x, y) + \underline{K}_n &= \int_{\partial V_n} \left( (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \right. \\
 &\quad \left. - \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \right) \, ds(\xi, \eta).
 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Die Flächennormale  $\vec{n}$  des Randes  $\partial V_n$  muss nach außen zeigen, also in die Isolierung. Dabei verschwindet die Normalenableitung der Konstanten:  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{K}_n = 0$ . Die Randintegralgleichung (2.57) verknüpft das Vektorpotential  $\underline{A}_z(x, y)$  eines beliebigen Punktes innerhalb der Leiterquerschnittsfläche  $V_n$  im Gegensatz zu Beziehung (2.55) nur noch mit den Werten des Vektorpotentials auf dem Rand von  $V_n$ .

Analog kann man eine Randintegralgleichung für das Vektorpotential in der Isolierung  $V_0$  außerhalb der Leiterquerschnitte aufstellen. Den Übergang von der Helmholtzschen Differentialgleichung (2.40) zur Laplaceschen (2.41) erreicht man durch Setzen von  $\sigma = 0$  – dies impliziert  $\beta = 0$  – und durch die Wahl der Konstanten  $\underline{K}_0 = 0$ . In der Randintegralgleichung (2.57) führt dieser Übergang zu

$$\underline{A}_z(x, y) = \int_{\partial V_0} \left( \underline{A}_z(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{n}} G_{(x,y)}^0(\xi, \eta) - G_{(x,y)}^0(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_z(\xi, \eta) \right) \, ds(\xi, \eta). \quad (2.58)$$

Auch in dieser Randintegraldarstellung wird das Vektorpotential  $\underline{A}_z(x, y)$  an einem beliebigen Punkt in der Isolierung durch die Werte auf dem Rand der Isolierung beschrieben. Wiederum zeigt die Flächennormale  $\vec{n}$  nach außen, also aus der Isolierung heraus.

Bevor nun anhand der beiden Randintegralgleichungen eine Diskretisierung des Randwertproblems vorgenommen und ein lineares Gleichungssystem aufgestellt wird, sollen noch drei Spezialfälle der Randintegrale betrachtet werden.

### 2.2.3 Spezielle Randintegrale

Als erster Spezialfall wird die Abgrenzung des modellierten Feldraumes nach außen hin betrachtet. Bei anderen Methoden zur numerischen Feldberechnung wie der Finite-Elemente-Methode oder der Finite-Differenzen-Methode gibt es eine äußere Grenze, bis zu der das Feld bestimmt wird, und an der festzulegende Randbedingungen gelten. Bei der hier verwendeten

Methode ist bisher durch Gleichung (2.44) nur bestimmt worden, dass im Unendlichen das Vektorpotential verschwindet. Wie [3] gezeigt hat, gilt jedoch auch

$$\int_{\partial\kappa_r} \left( \underline{A}_z(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{n}} G_{(x,y)}^0(\xi, \eta) - G_{(x,y)}^0(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \underline{A}_z(\xi, \eta) \right) ds(\xi, \eta) = 0 \quad (2.59)$$

mit dem beliebigen Fernkreisrand  $\partial\kappa_r$ . Damit ist die Randelementmethode unabhängig von der Wahl des Fernkreises und der Festlegung einer willkürlichen äußeren Begrenzung. Dieses ist ein deutlicher Vorteil der Randelementmethode, weil die Wahl der Feldraumgrenzen bei den oben angesprochenen alternativen Feldberechnungsverfahren unter Umständen das Ergebnis beeinflussen kann.

Die Randintegralgleichungen (2.57) und (2.58) geben das Vektorpotential  $\underline{A}_z(x, y)$  für einen beliebigen Punkt  $(x, y)$  abhängig von den Werten auf den Rändern an. Denkbar ist damit der Grenzfall eines Punktes  $(x, y)$  auf dem Rand. In diesem Falle muss die Existenz zweier Integrale untersucht werden, denn die Greenschen Funktionen  $\underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta)$  und  $G_{(x,y)}^0(\xi, \eta)$  weisen für  $(\xi, \eta) = (x, y)$  Pole auf.

Bei  $G_{(x,y)}^0(x, y)$  ist dieser Pol aus der Definition (2.49) sofort ersichtlich. Die Eigenschaften der Greenschen Funktion  $\underline{G}_{(x,y)}^\beta(x, y)$  folgen aus denen der Kelvinfunktionen im Ursprung. Hier ist ausschlaggebend, dass die Neumannsche Funktion  $N_0$  im Ursprung einen Pol aufweist. Integrale der Form  $\int_R \underline{G}_{(x,y)}(\xi, \eta) ds(\xi, \eta)$  oder auch  $\int_R \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \underline{G}_{(x,y)}(\xi, \eta) ds(\xi, \eta)$  führen deshalb für  $(x, y) \in R$  über Pole und müssen auf ihre Existenz hin untersucht werden.  $\underline{G}_{(x,y)}(\xi, \eta)$  steht dabei abkürzend für beide Greenschen Funktionen. Es ergeben sich die Grenzwerte

$$\int_R \underline{G}_{(a,b)}(\xi, \eta) ds(\xi, \eta) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \int_R \underline{G}_{(x,y)}(\xi, \eta) ds(\xi, \eta) \quad (2.60)$$

sowie

$$\int_R \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \underline{G}_{(a,b)}(\xi, \eta) ds(\xi, \eta) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \int_R \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \underline{G}_{(x,y)}(\xi, \eta) ds(\xi, \eta) - \frac{1}{2} \quad (2.61)$$

für  $(a, b) \in R$  (vgl. [3]). Die Unstetigkeit im Integral über die Normalenableitung umgeht man mit einem halbkreisförmigen Integrationsweg um den Pol herum. Letztlich liefert das Integral über diesen Halbkreis das Korrekturglied  $-\frac{1}{2}$ .

Mit Hilfe dieser Integrale kann das Randwertproblem im folgenden Abschnitt diskretisiert werden. Auf den Leiterrändern wird das Vektorpotential dazu als abschnittsweise konstant angenommen. Dadurch gehen die Randintegralgleichungen (2.57) und (2.58) in Summen über.

## 2.2.4 Diskretisierung des Randwertproblems

In der  $xy$ -Ebene sind die Ränder eines Leiterquerschnitts stückweise glatt vorausgesetzt worden. Nun wird der Rand  $\partial V_n$  des Leiters  $n$  in  $\nu_n$  beliebig gewählte Abschnitte eingeteilt, von denen jeder als Teil des ganzen Randes auch stückweise glatt ist. Diese Abschnitte sollen Randelemente genannt werden, nach denen die Randelementmethode benannt ist. Ein



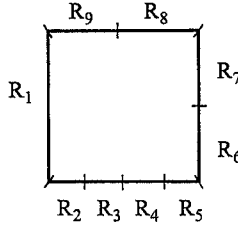


Bild 2.3: Beispiel für die Einteilung eines quadratischen Leiterquerschnitts in 9 Randelemente.

Beispiel für die Einteilung eines quadratischen Leiterquerschnitts zeigt die Abbildung 2.3. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Seiten eines Randes in gleichmäßige Randelemente eingeteilt. Dieses ist jedoch nicht notwendig. Sowohl die Größe als auch die Anzahl der Randelemente sind beliebig.

Nach einer solchen Einteilung kann jeder Rand als die endliche Vereinigung seiner Randelemente

$$\partial V_n = \bigcup_{k=1}^{\nu_n} R_k \quad (2.62)$$

angesehen werden. Zuordnungsprobleme der Anfangs- und Endpunkte zu genau einem Randelement lassen sich lösen, wenn jedes Randelement nur den Anfangspunkt enthält und am Ende offen ist. Für Integrationen über Randelemente kann die Zuordnung einzelner Punkte, die nur Nullmengen darstellen, unberücksichtigt bleiben.

Die Unterteilung der Ränder in Randelemente lässt das Randintegral (2.57) in

$$\begin{aligned} \underline{A}_z(x, y) + \underline{K}_n &= \int_{\partial V_n} \left( (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \right. \\ &\quad \left. - \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \right) ds(\xi, \eta) \\ &= \sum_{k=1}^{\nu_n} \left( \int_{R_k} \left( (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (\underline{A}_z(\xi, \eta) + \underline{K}_n) \right) ds(\xi, \eta) \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

übergehen. Eine analoge Form ergibt sich für das Randintegral der Isolierung (2.58).

Bis hierhin ist das Modell exakt. Außer den Einschränkungen in den geometrischen und physikalischen Eigenschaften sind noch keine Approximationen vorgenommen worden. Das soll jetzt geändert werden, um das Problem in eine für die numerische Lösung geeignetere Form zu bringen. Der Grundgedanke besteht darin, die Randelemente so klein zu wählen, dass auf ihnen das Vektorpotential  $\underline{A}_z$  und dessen Normalenableitung  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_z$  als konstant angesehen werden können. Da es sich dabei um stetige Funktionen handelt, ist diese Approximation bei hinreichend kleinen Randelementen eine praktikable Näherung. Letztlich ist die sinnvolle Größe der Randelemente für eine solche Approximation problemabhängig.

Auf einem Randelement  $R_k$  des Leiterrandes  $n$  soll mit dieser Approximation für alle Punkte  $(\xi, \eta) \in R_k$

$$\underline{A}_z(\xi, \eta) = \underline{A}_{n,k} \quad (2.64)$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_z(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_{n,k} \quad (2.65)$$

gelten. Für die Punkte auf Randelementen des Randes der Isolierung wird entsprechend

$$\underline{A}_z(\xi, \eta) = \underline{A}_{0,k} \quad (2.66)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_z(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_{0,k} \quad (2.67)$$

angesetzt. Auf die Frage der Identifizierung der Randelemente von Leiterquerschnittsflächen und Isolierung wird in Abschnitt 2.2.6 eingegangen. Dort werden die Stetigkeitsbedingungen (2.25) und (2.31) angewendet.

Genauso wie das nun auf einem Randelement konstante Vektorpotential kann dessen Normalenableitung vor das Integral in Gleichung (2.63) gezogen werden. Es resultiert der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \underline{A}_z(x, y) + \underline{K}_n &= \sum_{k=1}^{\nu_n} \left( \int_{R_k} \left( (\underline{A}_{n,k} + \underline{K}_n) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_{n,k} \right) ds(\xi, \eta) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\nu_n} \left( (\underline{A}_{n,k} + \underline{K}_n) \cdot \left( \int_{R_k} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) ds(\xi, \eta) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_{n,k} \cdot \left( \int_{R_k} \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) ds(\xi, \eta) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Für den Fall der Isolierung nimmt diese Beziehung die einfachere Form

$$\begin{aligned} \underline{A}_z(x, y) &= \sum_{k=1}^{\nu_0} \left( \underline{A}_{0,k} \cdot \left( \int_{R_k} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} G_{(x,y)}^0(\xi, \eta) ds(\xi, \eta) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_{0,k} \cdot \left( \int_{R_k} G_{(x,y)}^0(\xi, \eta) ds(\xi, \eta) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

an. Abkürzend werden die in den Gleichungen (2.68) und (2.69) auftretenden Randintegrale, die nur noch vom Randelement  $R_k$  sowie dem Punkt  $(x, y)$  abhängen, als

$$IG_{(x,y)}^\beta(R) = \int_R \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \, ds(\xi, \eta), \quad (2.70)$$

$$I\partial \underline{G}_{(x,y)}^\beta(R) = \int_R \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{G}_{(x,y)}^\beta(\xi, \eta) \, ds(\xi, \eta), \quad (2.71)$$

$$IG_{(x,y)}^0(R) = \int_R G_{(x,y)}^0(\xi, \eta) \, ds(\xi, \eta) \quad (2.72)$$

sowie

$$I\partial G_{(x,y)}^0(R) = \int_R \frac{\partial}{\partial \vec{n}} G_{(x,y)}^0(\xi, \eta) \, ds(\xi, \eta) \quad (2.73)$$

definiert, um die im Folgenden aufzustellenden linearen Gleichungen in einer übersichtlichen Form schreiben zu können. Die Bestimmung dieser Integrale ist [3] zu entnehmen. Arbeitet man mit abbrechenden Reihendarstellungen bei  $\underline{G}^\beta$ , so sind alle Integrale, wie dort beschrieben, analytisch lösbar. Sie lassen sich damit schnell und genau numerisch bestimmen.

## 2.2.5 Einführung linearer Gleichungen für das Randwertproblem

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt das Randwertproblem diskretisiert worden ist, sollen nun in einem letzten Schritt lineare Gleichungen aufgestellt werden, die eine Darstellung des approximierten Randwertproblems als lineares Gleichungssystem ermöglichen. Dieses Gleichungssystem kann dann mit bekannten Methoden gelöst werden.

Bisher sind immer das Vektorpotential und dessen Normalenableitung an einer beliebigen Stelle  $(x, y)$  in der Ebene bestimmt worden, so auch in den Gleichungen (2.68) und (2.69). Nun wird auf jedem Randelement  $R_k$  ein sogenannter Randknoten  $(x_k, y_k) \in R_k$  gewählt. Die Wahl des Randknotens auf einem Randelement ist beliebig und hat keinen Einfluss auf die weitere Rechnung, da das Vektorpotential und seine Normalenableitung ja schon als konstant auf jedem Randelement angenommen worden sind.

Wenn man mit den Gleichungen (2.68) und (2.69) das Vektorpotential in  $(x, y)$  bestimmen kann, dann ist es auch speziell in  $(x_k, y_k)$  berechenbar. In beiden Fällen ist das Ergebnis nur von den Werten auf den Leiterrändern abhängig. Insbesondere ergibt sich das Vektorpotential in einem Randknoten – also auf einem Randelement – in Abhängigkeit von den Werten auf allen Randelementen.

Die im vorangegangenen Abschnitt definierten Abkürzungen der Randintegrale über die Greenschen Funktionen werden jetzt für die hier gewählten Randknoten spezialisiert. Dabei werden die in den Gleichungen (2.60) und (2.61) bestimmten Grenzwerte verwendet. Es gilt

$$IG_{k,l}^\beta = IG_{(x_k, y_k)}^\beta(R_l), \quad (2.74)$$

$$IG_{k,l}^0 = IG_{(x_k, y_k)}^0(R_l), \quad (2.75)$$

$$I\partial \underline{G}_{k,l}^\beta = I\partial \underline{G}_{(x_k, y_k)}^\beta(R_l) + \frac{1}{2} \delta_{k,l} \quad (2.76)$$

sowie

$$I\partial G_{k,l}^0 = I\partial G_{(x_k, y_k)}^0 (R_l) + \frac{1}{2}\delta_{k,l}. \quad (2.77)$$

In diesen Beziehungen stellt  $\delta_{k,l}$  das Kroneckersymbol dar. Weiterhin soll

$$\underline{S}_k^\beta = \sum_{l=1}^{\nu_n} I\partial G_{k,l}^\beta \quad (2.78)$$

gelten. Mit diesen abkürzenden Schreibweisen folgt aus Gleichung (2.68) für das Vektorpotential im Randknoten  $l$  des Leiterrandes  $n$  der Zusammenhang

$$\underline{A}_{n,l} + \underline{K}_n = \sum_{k=1}^{\nu_n} \left( (\underline{A}_{n,k} + \underline{K}_n) \cdot I\partial G_{l,k}^\beta - \partial \underline{A}_{n,k} \cdot I\partial G_{l,k}^\beta \right) \quad (2.79)$$

bzw. umgestellt der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\nu_n} \left( (I\partial G_{l,k}^\beta - \delta_{l,k}) \cdot \underline{A}_{n,k} - I\partial G_{l,k}^\beta \cdot \partial \underline{A}_{n,k} \right) - (\underline{S}_l^\beta - 1) \cdot \underline{K}_n = 0. \quad (2.80)$$

Setzt man  $\underline{K}_n = 0$  sowie  $\beta = 0$ , gelingt auch hier der Übergang zu der Darstellung für die Isolierung. Anstelle der Beziehung (2.80) folgt die einfachere Form

$$\sum_{k=1}^{\nu_0} ((I\partial G_{l,k}^0 - \delta_{l,k}) \cdot \underline{A}_{0,k} - I\partial G_{l,k}^0 \cdot \partial \underline{A}_{0,k}) = 0. \quad (2.81)$$

Als letzte Gleichung muss noch die Stromeinprägung (2.45) diskretisiert werden. Dazu wird das Integral um einen Leiterrand in Integrale über dessen Randelemente aufgespalten und die Normalenableitung des Vektorpotentials durch den konstanten Wert auf diesem Randelement ersetzt. Es gilt

$$\begin{aligned} -\mu_0 \mu_{rn} \cdot \underline{I}_n &= \int_{\partial V_n} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_z(\xi, \eta) \, ds(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\nu_n} \left( \int_{R_k} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \underline{A}_z(\xi, \eta) \, ds(\xi, \eta) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\nu_n} \left( \int_{R_k} \partial \underline{A}_{n,k} \, ds(\xi, \eta) \right) = \sum_{k=1}^{\nu_n} \partial \underline{A}_{n,k} \left( \int_{R_k} 1 \, ds(\xi, \eta) \right) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Führt man zusätzlich die Randelementlänge

$$\lambda_l = \int_{R_l} 1 \, ds \quad (2.83)$$

ein, so ergibt sich mit

$$\sum_{k=1}^{\nu_n} \lambda_k \cdot \partial \underline{A}_{n,k} = -\mu_0 \mu_{rn} \cdot \underline{I}_n \quad (2.84)$$

die noch fehlende Verknüpfung, um ein lineares Gleichungssystem aufzustellen, bei dem sich die Anzahl der Unbekannten und die Anzahl der Gleichungen entsprechen.

Im folgenden Abschnitt soll aus der Gleichung (2.84) zusammen mit den diskretisierten Randintegralgleichungen (2.80) und (2.81) ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden. Dazu müssen mit den Stetigkeitsbedingungen die Randelemente der Leiter mit denen der Isolierung identifiziert werden.

## 2.2.6 Zusammenfassen der linearen Gleichungen zu einem linearen Gleichungssystem

Einerseits beziehen sich die diskretisierte Randintegralgleichung (2.80) sowie die ebenfalls diskretisierte Darstellung der Stromeinprägung (2.84) auf Randelemente von Leiterquerschnittsflächen. Andererseits ist die Randintegralgleichung der Isolierung (2.81) bisher immer mit eigenständig indizierten Randelementen verwendet worden. An dieser Stelle soll nun die Trennung aufgehoben und eine einheitliche Randelemente-Nummerierung eingeführt werden.

Alle Randelemente werden jetzt fortlaufend von 1 bis zu deren Gesamtzahl  $\nu$  durchnummeriert. Insbesondere gilt für die Randelementzahlen  $\nu_n$  der einzelnen Leiter

$$\nu = \nu_0 = \sum_{n=1}^N \nu_n. \quad (2.85)$$

Als Konsequenz daraus startet die Nummerierung der Randelemente beim willkürlich gewählten Leiter 1 mit der Nummer 1.  $R_{\nu_1}$  ist das letzte Randelement dieses Leiters, während  $R_{\nu_1+1}$  das erste des Leiters 2 darstellt. Schließlich erhält das letzte Randelement des letzten Leiters  $n$  die Nummer  $\nu$ . Mit dieser Art der Nummerierung ergeben sich an den bisherigen Gleichungen nur in einem Punkt Änderungen. Die Summen von 1 bis  $\nu_n$  müssen durch Summen von  $\nu_1 + \dots + \nu_{n-1} + 1$  bis  $\nu_1 + \dots + \nu_n$  ersetzt werden, wobei  $n$  die Nummer des Leiters ist, auf den sich die betreffende Gleichung bezieht. Mit dieser Konvention kann man die Stetigkeitsbedingungen (2.42) sowie (2.43) durch

$$\underline{A}_{n,k} = \underline{A}_{0,k} \quad (2.86)$$

und

$$\partial \underline{A}_{n,k} = \mu_{rn} \cdot \partial \underline{A}_{0,k} \quad (2.87)$$

ausdrücken. Dabei ist  $n = n(k)$  mit  $1 \leq n \leq N$  die Nummer eines Leiters, auf dem das Randelement  $k$  mit  $1 \leq k \leq \nu$  liegt. An dieser Stelle können nun die Gleichungen (2.80), (2.81) und (2.84) zu einem linearen Gleichungssystem zusammengefasst werden. Dazu werden die Größen  $\underline{A}_{0,k}$  und  $\partial \underline{A}_{0,k}$  aus Gleichung (2.81) mit den Stetigkeitsbedingungen durch  $\underline{A}_{n,k}$  und  $\partial \underline{A}_{n,k}$  ersetzt – oder umgekehrt.

Dieses Gleichungssystem enthält die  $\nu$  konstanten Vektorpotentiale  $\underline{A}_{n,k}$  sowie ebenfalls  $\nu$  konstante Normalenableitungen  $\partial \underline{A}_{n,k}$  als Unbekannte. Hinzukommen noch  $N$  Konstanten  $\underline{K}_n$  der Leiter. Insgesamt ergeben somit  $N + 2\nu$  Unbekannte, eine für jeden Leiter und

zwei für jedes Randelement. Genau diesem Wert entspricht aber auch die Anzahl der vorhandenen Gleichungen. Für jeden Leiter gibt es eine Gleichung (2.84) zur Definition der Stromeinprägung. Weiterhin kann für jedes Randelement eine lineare Gleichung (2.79) aufgestellt werden, woraus die Beziehung (2.80) folgt. Analog erhält man für jedes Randelement als zweite Gleichung (2.81).

Der im nachfolgenden Abschnitt näher erläuterte Aufbau des hier beschriebenen Gleichungssystems weist eine Blockstruktur auf, die für eine effiziente Lösung des Gleichungssystems ausgenutzt werden soll.

### 2.2.7 Aufbau und Struktur des linearen Gleichungssystems

Aus der Diskretisierung des Randwertproblems ist ein Gleichungssystem abgeleitet worden, dass aus den je  $\nu$  Gleichungen (2.80) und (2.81) sowie  $N$  Beziehungen (2.84) besteht. Es weist somit die Dimension  $N + 2\nu$  auf. In der Form

$$\begin{pmatrix} [I\partial\mathcal{G}^L] & -[I\mathcal{G}^L] & [\underline{S}^L] \\ [I\partial\mathcal{G}^0] & -[I\mathcal{G}^0] & [0] \\ [0] & [\lambda^L] & [0] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\underline{A}] \\ [\partial\underline{A}] \\ [\underline{K}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ -[\mu\underline{I}] \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

lassen sich diese Beziehungen in Blöcke einteilen, deren Funktion sich aus den oben genannten Gleichungen ergibt. Dabei bilden die Ausdrücke  $[\underline{A}]$ ,  $[\partial\underline{A}]$  und  $[\underline{K}]$  den Lösungsvektor. In diesem enthält  $[\underline{A}]$  die Werte, die das Vektorpotential auf jedem Randelement annimmt:

$$[\underline{A}]_{k=1,\nu} = \underline{A}_{n,k} = \underline{A}_{0,k}. \quad (2.89)$$

Aufgrund der Stetigkeitsbedingung (2.86) muss man nicht zwischen den Werten im Leiter und in der Isolierung unterscheiden. Anders ist die Situation beim Vektor  $[\partial\underline{A}]$ . Er enthält die Werte für die Normalenableitungen des Vektorpotentials auf den Randelementen. Da sich diese im Leiter und in der Isolierung gemäß Gleichung (2.87) um den Faktor  $\mu_{rn}$  unterscheiden, muss man an dieser Stelle eine der beiden Möglichkeiten wählen. Diese Entscheidung hat Konsequenzen in den Matrixblöcken  $[I\mathcal{G}^L]$  und  $[\mu\underline{I}]$ . Hier wird – willkürlich – die Normalenableitung in der Isolierung verwendet. Es gilt

$$[\partial\underline{A}]_{k=1,\nu} = \partial\underline{A}_{0,k}. \quad (2.90)$$

Der dritte Teil der Lösungsvektors  $[\underline{K}]$  setzt sich aus den Konstanten der Leiter mit

$$[\underline{K}]_{n=1,N} = \underline{K}_n \quad (2.91)$$

zusammen. Für die Elemente des Blockes  $[I\partial\mathcal{G}^L]$  folgt aus Gleichung (2.80)

$$[I\partial\mathcal{G}^L]_{k=1,\nu;l=1,\nu} = \begin{cases} I\partial\mathcal{G}_{k,l}^\beta - \delta_{k,l}, & \text{wenn die Randelemente } k \text{ und } l \text{ zum} \\ & \text{gleichen Leiter gehören} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.92)$$

Im Gegensatz dazu muss bei dem Block  $[I\bar{G}^L]$  die Stetigkeitsbedingung (2.87) beachtet werden, so dass hier

$$[I\bar{G}^L]_{k=1, \nu; l=1, \nu} = \begin{cases} I\bar{G}_{k,l}^\beta \cdot \mu_{rn}, & \text{wenn die Randelemente } k \text{ und } l \text{ zum} \\ & \text{gleichen Leiter } n \text{ gehören} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.93)$$

gilt. Die Blöcke  $[I\partial G^0]$  und  $[IG^0]$  können jedoch wieder als

$$[I\partial G^0]_{k=1, \nu; l=1, \nu} = \begin{cases} I\partial G_{k,l}^0 - \delta_{k,l}, & \text{wenn die Randelemente } k \text{ und } l \text{ zum} \\ & \text{gleichen Isolationsgebiet gehören} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.94)$$

und

$$[IG^0]_{k=1, \nu; l=1, \nu} = \begin{cases} IG_{k,l}^0, & \text{wenn die Randelemente } k \text{ und } l \text{ zum} \\ & \text{gleichen Isolationsgebiet gehören} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.95)$$

direkt aus der Gleichung (2.81) abgelesen werden.  $[\underline{S}^L]$  folgt mit

$$[\underline{S}^L]_{k=1, \nu; n=1, N} = \begin{cases} \underline{S}_k^\beta - 1, & \text{wenn das Randelement } k \text{ zum Leiter } n \text{ gehört} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.96)$$

aus Gleichung (2.80). Quasi eine dazu gespiegelte Struktur erhält  $[\lambda^L]$  durch

$$[\lambda^L]_{n=1, N; k=1, \nu} = \begin{cases} \int_{R_k} 1 \, ds, & \text{wenn das Randelement } k \text{ zum Leiter } n \text{ gehört} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.97)$$

Dabei muss die Stetigkeitsbedingung für die Normalenableitung (2.87) beachtet werden, die ebenfalls den Block  $[\mu \underline{I}]$

$$[\mu \underline{I}]_{n=1, N; m=1, N} = \mu_0 \underline{I}_n \cdot \delta_{n,m} \quad (2.98)$$

aus Gleichung (2.84) bestimmt. In Beziehung (2.98) kürzt sich aufgrund der Wahl von  $\partial \underline{A}_{0,k}$  als Lösung die relative Permeabilität  $\mu_{rn}$  heraus.

An den Definitionen der Matrixblöcke kann man schon erkennen, dass drei wesentliche Belegungskriterien den Aufbau des Gleichungssystems bestimmen. Im Falle der Matrixblöcke  $[I\partial \bar{G}^L]$  und  $[I\bar{G}^L]$  sind nur Elemente der Matrix belegt, wenn die zugehörigen Randelemente zum gleichen Leiter gehören. Liegen zwei Randelemente im gleichen Isolationsgebiet, also z.B. im gleichen Fenster eines Transformatoreisenkerns, so sind die entsprechenden Matrixelemente der Blöcke  $[I\partial G^0]$  und  $[IG^0]$  belegt. Das dritte und letzte Belegungsschema eines Matrixblockes kommt bei den Blöcken  $[\underline{S}^L]$  und  $[\lambda^L]$  zum Tragen. Es läßt nur Elemente an den Stellen zu, an denen ein Randelement auf einem Leiter liegt. Bei Randelementen anderer Leiter ergeben sich hier Nullen.

Insbesondere haben diese Besetzungsvorschriften zur Folge, dass sich immer in jedem der beschriebenen Blöcke auf natürliche Weise Unterblöcke bilden, die durch die Randelemente eines Leiters definiert werden. Alle Randelemente eines Leiters zeigen in diesen Blöcken das gleiche Verhalten bezüglich der Belegung, wie auch das Beispiel im nächsten Abschnitt zeigt. Sie sind entweder komplett belegt oder vollständig mit Nullen ausgefüllt.

### 2.2.8 Beispiel für die Blockstruktur des Gleichungssystems

Wie die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Besetzungsregeln zeigen, hat das lineare Gleichungssystem (2.88) eine klar definierte Blockstruktur. Alle Matrixelemente, die zu Randelementen eines Randes gehören, bilden einen Block, der entweder vollständig belegt oder vollständig frei ist. Ob ein Matrixelement besetzt ist, das bezüglich Zeilen und Spalten zu unterschiedlichen Rändern gehört, entscheidet sich aufgrund der Geometrie. Die Zugehörigkeit zum gleichen Leiter bei  $[I\partial\mathcal{Q}^L]$  und  $[IG^L]$  oder zum gleichen Isolationsgebiet bei  $[I\partial G^0]$  und  $[IG^0]$  sind, wie oben ausgeführt, die entscheidenden Kriterien.

Als Beispiel soll hier ein Drehstromtransformator mit zwei Wicklungen herangezogen werden. In jeder Phase sind die Hin- und Rückleiter jeder Wicklung durch einen Leiter, wie in Abb. 2.4 gezeigt, dargestellt. Damit besteht das gesamte Modell aus 13 Leitern und 15 Rändern. Beginnend mit dem Eisenkern erfolgt die Nummerierung der Leiter sowie Ränder von links nach rechts. Es ergibt sich eine Belegung, die dem Schema

$$[I\partial\mathcal{Q}^L] = \begin{pmatrix} [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

entspricht; der Matrixblock  $[IG^L]$  weist die gleiche Belegungsstruktur auf. Mit  $[*]$  ist in dieser Darstellung ein belegter Block mit den Dimensionen der entsprechenden Randelementzahlen gekennzeichnet. Demgegenüber stellt  $[0]$  einen Block aus Nullen dar. Auf der

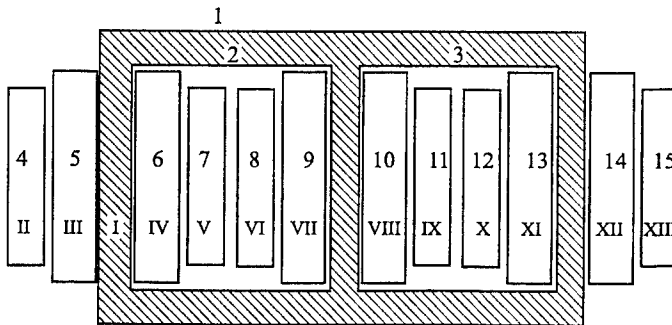


Bild 2.4: Einfaches Modell eines Drehstromtransformators zur Veranschaulichung der Struktur des Gleichungssystems. Die arabischen Zahlen geben die Nummer des Randes, die römischen die des Leiters an.



Diagonalen bestimmen sich die Zeilen und Spalten der Blöcke aus der Anzahl der Randelemente des gleichen Randes. Daher ergeben sich dort immer quadratische Matrixblöcke. Für Matrixblöcke, deren Struktur von der Lage der Ränder in verschiedenen Isolationsgebieten abhängt, gilt

$$[I\partial G^0] = \begin{pmatrix} [*] & [0] & [0] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] \\ [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [*] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] \\ [*] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] \\ [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] \\ [*] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] \\ [*] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

bzw. analoges für die Matrix  $[IG^0]$ . Demgegenüber besitzt der Block  $[\lambda^L]$  die Gestalt

$$[\lambda^L] = \begin{pmatrix} [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] \end{pmatrix}, \quad (2.101)$$

während  $[\mathcal{L}^L]$  ein dazu transponiertes Belegungsschema aufweist. Die Belegung der Matrixblöcke ist ausführlich dargestellt worden, denn sie eröffnet den Zugang zu der Lösungsmethode des Gleichungssystems. Aufgrund dessen Größe wird dafür ein spezieller Algorithmus benötigt.

### 2.3 Spezieller Lösungsalgorithmus für das lineare Gleichungssystem des Randwertproblems

Prinzipiell kann das zur Lösung des diskretisierten Randwertproblems aufgestellte lineare Gleichungssystem mit den bekannten Methoden bearbeitet werden. Für die hier durchgeführten Feldberechnungen an Leistungstransformatoren stößt man mit den herkömmlichen Verfahren jedoch sehr schnell an die Grenzen der verfügbaren Rechenleistung.

Wenn man bei einem 110-kV-/10-kV-Transformator von überspannungsseitig etwa 1000 Windungen ausgeht, sind bei der Schaltgruppe Yd knapp 160 Windungen in der Unterspannungswicklung zu berücksichtigen. Allerdings bestehen die Leiter der Unterspannungswicklung in der Praxis zum Teil aus Drill-Leitern mit bis zu 20 Teilleitern. Damit hätte man insgesamt ungefähr 4200 Leiter nachzubilden. Jede Windung ergibt wiederum zwei Querschnittsflächen in der  $xy$ -Ebene, einen Hin- und einen Rückleiter. Bildet man die 8400 Ränder nur durch ein Minimum von vier Randelementen pro Rand, also eines pro Seite, nach, so müssen bereits 33600 Randelemente berücksichtigt werden. Entsprechend den obigen Erläuterungen wird die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems vom doppelten der Randelementezahl zuzüglich der Anzahl der Leiter bestimmt. In diesem Fall ergibt sich eine Dimension von 75600. Bildet man nun zugleich alle drei Phasen eines Drehstromtransformators nach, dann wären weit über 200000 Gleichungen zu lösen.

Gleichungssysteme dieser Größenordnung benötigen bei Verwendung von doppelt genauen komplexen Zahlen einige hundert Gigabytes Speicher, die auch heute normalerweise nicht verfügbar sind. Zunächst soll deshalb die Problemgröße durch Ausnutzen von vorhandenen Symmetrien halbiert werden. Diese Maßnahme reduziert den Speicherbedarf um den Faktor vier, da der benötigte Speicher vom Quadrat der Dimension des Gleichungssystems abhängt. Anschließend wird ein speziell auf das vorliegende Problem zugeschnittener Gauß-Algorithmus beschrieben, der mit Blockmatrizen und dynamischer Speicherverwaltung arbeitet. Dieser ermöglicht die Lösung extrem großer Gleichungssysteme bei beschränktem Speicherplatz. Zum Abschluss dieses Kapitels werden die Berechnungsmöglichkeiten beschrieben, die aus der Lösung des linearen Gleichungssystems resultieren.

### 2.3.1 Ausnutzung der Symmetrie des Modells

Aufgrund ihrer Geometrie weisen die bisher dargestellten Transformatormodelle in den Abbildungen 2.2 und 2.4 gleich mehrere Punkt- und Achsensymmetrien auf. Allerdings können die wenigsten dieser Symmetrien ausgenutzt werden, denn nicht allein die Geometrie muss symmetrisch sein, sondern auch die Stromeinprägung. Die Abbildung 2.5a stellt diesen Sachverhalt schematisch dar. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass reale Transformatoren tatsächlich etwa eine halbe Windungshöhe Versatz zwischen den Hin- und Rückleitern aufweisen. Dass dieser Fehler vernachlässigt werden darf, wird bei der konkreten Berechnung der Streuinduktivitäten am Beispiel eines 110-kV-/10-kV-Transformators im Abschnitt 3.3.7 durch eine Parametervariation (Sensitivitätsanalyse) nachgewiesen.

Entscheidendes Kriterium für ein symmetrisches Modell sind symmetrische Magnetfelder. Diese werden erzeugt, wenn sowohl Geometrie als auch die physikalischen Daten der Leiter sowie die Stromeinprägung symmetrisch sind. Dabei gibt es zwei Ausprägungen der Symmetrie:

Die erste ist die in Bild 2.5a dargestellte Achsensymmetrie, die für die hier modellierten Transformatoren relevant ist. Auf der einen Seite fließt der Strom in die Leiter hinein, während er auf der anderen Seite der Symmetrieachse in den korrespondierenden Leitern wieder herausfließt. In diesem Fall ist der Umlaufsinn der Feldlinien auf beiden Seiten genau entgegengesetzt, nämlich an der Symmetrieachse um  $180^\circ$  gedreht. Das berechnete Vektorpotential, dessen Normalenableitung, sowie auch die Konstanten der Leiter  $K_n$  werden ebenfalls in gleicher Weise gedreht. Da diese Größen sich auf die  $z$ -Achse beziehen, weisen sie durch die Drehung auf beiden Seiten der Symmetrieachse entgegengesetzte Vorzeichen

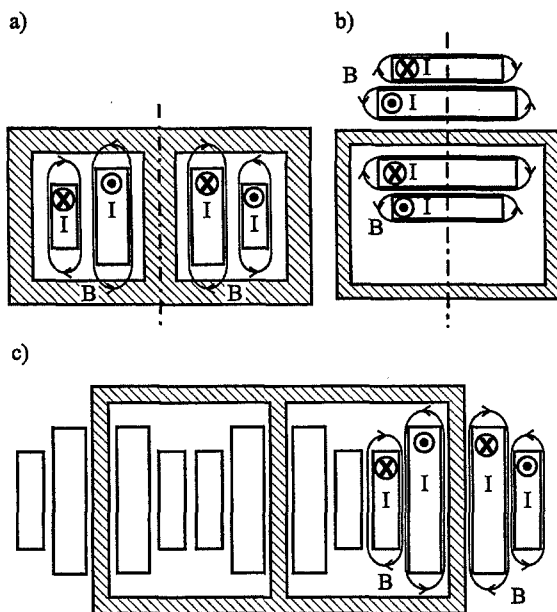


Bild 2.5: Verschiedene Möglichkeiten der Symmetrie. a) Normale Achsensymmetrie beim Transformator mit um  $180^\circ$  gedrehten Feldern. b) Achsensymmetrie beim Wandler mit gleichsinnigen Feldern. c) Keine Symmetrie bei mehrphasigen Modellen.

auf. Ihr Betrag ist jedoch gleich, so dass die entsprechenden Gleichungen zusammengefasst werden können und sich deren Anzahl halbiert. Leiter, die auf beiden Seiten der Symmetrieachse liegen, dürfen keinen Strom führen. Bei Transformatoren erfüllt der Eisenkern diese Bedingung. Eine Gleichung für die Konstante  $K_n$  eines jeden solchen Leiters bleibt erhalten. Nicht verwendet wird in dieser Arbeit die zweite Form der Symmetrie aus Abbildung 2.5b. Sie kann teilweise bei der Berechnung von Wandlern eingesetzt werden. Dort ist die Strom-einprägung auf beiden Seiten der Symmetrieachse gleichgerichtet. Damit ergeben sich gleichsinnige Felder; die korrespondierenden Vektorpotentiale und Leiterkonstanten sind identisch. Auch die Normalenableitung ist bis auf die Tatsache identisch, dass sie in die gespiegelte Richtung zeigt. Dadurch werden wiederum zwei Gleichungen für eine symmetrische Größe zu einer einzigen reduziert.

Der in Abbildung 2.5c skizzierte Drehstromtransformator zeigt keine Symmetrie auf, weil die geometrisch korrespondierenden Leiter nicht die Hin- und Rückleiter einer Windung darstellen. Zwar können für Spezialfälle – wie bestimmte Arten der Stromeinprägung – Symmetrien genutzt werden, für die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen sind jedoch immer asymmetrische Stromeinprägungen notwendig (siehe Kapitel 3.2).

### 2.3.2 Strukturierung der Gleichungssysteme durch Blockmatrizen

Auch unter Ausnutzung vorhandener Symmetrien bleiben noch immer zu große lineare Gleichungssysteme zu lösen, als dass man sie mit einem konventionellen Gauß-Algorithmus bearbeiten könnte. In diesem Fall müsste nämlich das gesamte Gleichungssystem vollständig im Speicher vorhanden sein. Angesichts dessen Dimension verbietet sich diese Maßnahme. Weiterhin ist hier ein Gleichungssystem zu lösen, das weder mit Bandmatrizen noch mit Sparse-Matrix-Algorithmen effektiv beschrieben werden kann. Gerade bei Ausnutzung von Symmetrien liegt der Besetzungsgrad deutlich über 40 %; ohne Symmetrien ist er geringfügig niedriger. Daher ist ein anderer Weg zur Lösung einzuschlagen.

Ausgenutzt wird die Eigenschaft, dass beim zu berechnenden Modell die Struktur der Matrixblöcke gemäß der Gleichungen (2.99), (2.100) und (2.101) nur von der Geometrie abhängt. Dieses ermöglicht einen Algorithmus, der – basierend auf dem Gaußschen Verfahren – analytische Rechenvorteile und dynamische Speicherverwaltung kombiniert. So spart er in erheblichem Umfang Speicher und Rechenzeit ein.

Bei dem Verfahren wird von der in [9] vorgeschlagenen Einteilung großer Gleichungssysteme in Blöcke ausgegangen. Von denen kann jeder einzelne im Speicher des Rechners dargestellt werden, während das Gesamtsystem entschieden zu groß dafür wäre. Bei dem hier vorliegenden Problem bietet es sich zunächst an, die sich aus der Verteilung der Randelemente auf die Ränder ergebende Blockstruktur zu verwenden. Diese naheliegende Wahl erzeugt jedoch sehr viele extrem kleine Blöcke. Modelliert man z.B. einige tausend Leiter mit je vier Randelementen, so erhält man ein Gesamtsystem, das sich aus Millionen von  $4 \times 4$ -Matrizen zusammensetzt. Matrizen dieser Größenordnung passen zwar problemlos in den Speicher, erreichen bei der Bearbeitung jedoch nur Bruchteile der Peakperformance des Rechners. Dieses Verhalten wird durch Benchmarktests belegt, die anhand von Matrixoperationen wie Inversion oder Multiplikation die Leistungsfähigkeit der Rechner messen. Sie erreichen typischerweise bei Dimensionen ab 1000 ein Mehrfaches der Leistung im Vergleich zu Dimensionen um 100, vgl. [11]. Besonders auf Parallelrechnern nimmt die Leistungsfähigkeit mit der Problemgröße zu, wie in [12] gezeigt wird.

Infolgedessen teilt ein verbesserter Ansatz das Gleichungssystem in nur so viele Blöcke ein, dass möglichst mehrere davon gleichzeitig in den Speicher des Rechners passen, jeder einzelne aber nicht zu klein wird. Bei den in dieser Arbeit gelösten Gleichungssystemen mit typischerweise 50000 bis 130000 Gleichungen hat sich eine Einteilung in 20 mal 20 Blöcke bewährt. Eine solche Blockbildung kann anhand der Matrizen (2.99) und (2.100) illustriert werden. Es sollen die Matrixblöcke  $[I\partial G^L]$  und  $[I\partial G^0]$  beispielsweise in fünf mal fünf Unterblöcke zerlegt werden. Eine Einteilung gemäß

$$[I\partial G^L] = \begin{pmatrix} [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [0] & [0] \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

entspricht der gewünschten Struktur, wenn man die durchgezogenen Linien als Blockgrenzen auffasst. Analog dazu gliedert man  $[I\partial G^0]$  folgendermaßen auf:

$$[I\partial G^0] = \begin{pmatrix} [*] & [0] & [0] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] \\ [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] \\ [*] & [0] & [0] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] \\ [*] & [0] & [0] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] \\ [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] & [*] & [*] & [*] & [0] & [0] \\ [*] & [0] & [0] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] \\ [*] & [0] & [0] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [*] & [*] \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

Bereits die beiden Beispiele zeigen, dass es bei dieser Blockstruktur zu verschiedenen Typen von Blöcken kommen kann. Neben den beiden Typen vollständig besetzt und vollständig unbesetzt gibt es auch teilweise besetzte Blöcke. Deren Anteil ist bei Modellen mit vielen Tausend benachbarten Leitern allerdings gering. Deshalb werden auch diese nicht optimal ausgefüllten Blöcke verwendet, weil der dadurch entstehende Mehraufwand begrenzt ist. Ein wichtiger Vorteil neben der Geschwindigkeitssteigerung bei richtig dimensionierten Blöcken besteht darin, dass man anhand der geometrischen Lage der Ränder feststellen kann, ob ein Block überhaupt von Null verschieden ist. Im weiteren Verlauf der Arbeit ermöglicht die Kenntnis der Nullblöcke das Ausnutzen von Rechenvorteilen.

In [9] wird das Lösen eines in Blöcke eingeteilten linearen Gleichungssystems mit dem Gauß-Algorithmus beschrieben, bei dem anstelle der Zahlen nun Blockmatrizen treten. Die Grundrechenarten werden dabei durch algebraische Matrixoperationen ersetzt: Bei der Multiplikation von Matrizen muss man in diesem Zusammenhang auf die Reihenfolge achten, da die

Matrizenmultiplikation im Gegensatz zur Multiplikation komplexer Zahlen nicht kommutativ ist. Insbesondere müssen natürlich auch die Matrixdimensionen zusammenpassen. Weiterhin wird die übliche Division durch die Multiplikation mit der inversen Matrix dargestellt. Natürlich können nur quadratische Matrizen invertiert werden. Beim Gauß-Algorithmus muss deshalb bei der Einteilung der Zeilen und Spalten in Blöcke darauf geachtet werden, dass die Matrizen auf der Diagonalen quadratisch werden. Dieses entspricht der Forderung, dass beim Gauß-Algorithmus mit Zahlen die Diagonalelemente nicht Null sein dürfen, denn durch sie muss geteilt werden. Eine Einschränkung stellt diese Bedingung nicht dar, weil man sie stets durch eine identische Einteilung der Blöcke bezüglich Zeilen und Spalten erfüllen kann.

Voraussetzung für die Funktionsweise eines Gauß-Algorithmus mit Blockmatrizen ist damit, dass alle Blöcke auf der Diagonalen invertierbar sind, wenn das Verfahren bei der Bearbeitung in der entsprechenden Zeile angekommen ist. Dieses ist nicht grundsätzlich der Fall und hängt stark von der Reihenfolge der Matrixblöcke in Gleichung (2.88) ab. Es hat sich gezeigt, dass die zu lösenden linearen Gleichungssysteme bei der gewählten Reihenfolge der Matrixblöcke sehr gut konditioniert sind, so dass auch bei größten Dimensionen die entsprechenden Matrizen invertierbar bleiben.

An dieser Stelle soll der Gauß-Algorithmus nicht im Detail besprochen werden. Im Anhang A ab Seite 139 ist ein Beispiel ausführlich mit allen benötigten Matrixoperationen dargestellt. Besonderes Augenmerk wird dort auf das Speicherverhalten gelegt. Den wesentlichen Schritt bei der Einsparung von Speicher stellt die dynamische Verwaltung der Blockmatrizen dar. Ein solcher Matrixblock belegt erst dann Speicher, wenn er erzeugt wird. Nach der letzten Verwendung eines Matrixblockes muss dieser sofort gelöscht und der entsprechende Speicher wieder freigegeben werden. Dieses Verfahren eignet sich ebenfalls dazu, zwischenzeitlich nicht benötigte Matrixblöcke auf die Festplatte oder andere Speichermedien – wie z.B. spezielle Erweiterungsspeicher – auszulagern. Diese Möglichkeit ist z.B. auf einer NEC SX-4 am Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart genutzt worden. Damit wird die Größe der Gleichungssysteme nur durch den verfügbaren Auslagerungsspeicher beschränkt, der meist in viel größerem Maßstab zur Verfügung steht als konventioneller Speicher. Es sind sogar Versuche unternommen worden, die ausgelagerten Matrizen zu komprimieren. Obwohl teilweise Kompressionsraten von bis zu 90 % erreicht werden konnten, hat sich dieses Verfahren wegen seiner Unberechenbarkeit bezüglich des tatsächlich benötigten Platzes sowie der wesentlich gestiegenen Rechenzeit nicht bewährt.

Eine weitere Möglichkeit, den Speicherbedarf bei der Lösung des linearen Gleichungssystems merklich zu senken, stellt eine nur teilweise Lösung des Problems dar. Bekanntlich hat der Gauß-Algorithmus die Eigenschaft, den Lösungsvektor von unten nach oben zu erzeugen. Wenn man tatsächlich nicht alle Elemente des Lösungsvektors benötigt, kann man die wirklich zu berechnenden Größen ans Ende stellen und die Lösung abbrechen, sobald dieser Teil bestimmt ist. Auf diese Weise spart man nicht nur die Rechenzeit für den unerheblichen Teil der Lösung, sondern man kann auch bei der Erzeugung der oberen Dreiecksmatrix jede abgearbeitete Zeile vollständig löschen, solange die benötigten Elemente des Lösungsvektors eine größere Zeilennummer aufweisen. Dieses Vorgehen bewährt sich immer dann, wenn die Vektorpotentiale und deren Normalenableitungen nicht explizit benötigt werden, sondern nur die Konstanten  $[K]$ , z.B. wenn allein die Streuinduktivitäten interessieren.

Weiterhin wird ausgenutzt, dass beim Gauß-Verfahren auf der Diagonalen Einheitsmatrizen entstehen und zunächst unterhalb der Diagonalen und später auch oberhalb Nullblöcke

erzeugt werden. Natürlich müssen diese Matrixblöcke nicht mehr berechnet werden. Genauso wenig muss man sie im Speicher behalten, wenn man weiß, bei welchen der Matrixblöcke es sich um Nullblöcke oder Einheitsmatrizen handelt. Ähnliche Rechenvorteile erreicht man, indem Multiplikationen mit Nullmatrizen oder Additionen zu Nullmatrizen nicht mehr explizit ausgeführt werden. Hierbei ist es von großem Nutzen, allein aus der Geometrie entscheiden zu können, ob Blöcke belegt sind oder nicht.

Im Beispiel im Anhang A wird detailliert beschrieben, wie diese Rechenvorteile ausgenutzt werden. Ebenfalls werden die Auswirkungen auf den Speicherbedarf und die Rechenzeit betrachtet, wenn man das Gleichungssystem nur teilweise löst. Das Beispiel zeigt die deutlichen Vorteile, die der auf das vorliegende Problem spezialisierte Algorithmus bringt. Mit diesem Verfahren bestimmte Lösungen müssen noch den Auswertungsrechnungen im folgenden Abschnitt unterzogen werden, um z.B. die Streuinduktivitäten eines Transformators zu bestimmen.

### 2.3.3 Auswertung des Lösungsvektors

Neben den konstanten Vektorpotentialen auf den einzelnen Randelementen und deren Normalenableitungen enthält der Lösungsvektor auch noch die Konstanten der Leiter. Auf die physikalische Bedeutung dieser Größen ist bisher noch nicht eingegangen worden. Dies erfolgt nun.

Aus der Definition der Konstanten  $\underline{K}_n$  (2.16) geht hervor, dass sie sich proportional zum konstanten Gradienten des skalaren Potentials  $\underline{\phi}$  in  $z$ -Richtung verhalten. Dann ist für das Potential auch die erweiterte Darstellung

$$\underline{\phi}(z) = j\omega \underline{K}_n \cdot z + \underline{Y}_n \quad (2.104)$$

möglich. Sie enthält eine zusätzliche Konstante  $\underline{Y}_n$ . Bei dieser Größe handelt es sich um eine Integrationskonstante, die im Folgenden wieder aus der Rechnung herausfällt. Die Gleichung (2.104) gestattet jedoch nun eine Interpretation der Konstanten  $\underline{K}_n$ . Sie stellt ein Maß für den Spannungsabfall pro Längeneinheit entlang des Leiters  $n$  dar. Für die Spannung in  $z$ -Richtung des Leiters  $n$  ergibt sich

$$\underline{U}(z_1, z_2) = \underline{\phi}(z_1) - \underline{\phi}(z_2) = j\omega \underline{K}_n \cdot (z_1 - z_2). \quad (2.105)$$

Verwendet man den auf die Länge bezogenen ohmschen Widerstandes  $R'_n$  für jeden Leiter  $n$  und die ebenso bezogene Induktivität  $L'_n$ , so erhält man den Ausdruck

$$\frac{\Delta U}{\Delta z} = (R' + j\omega L') \cdot 1 \text{ A}; \quad (2.106)$$

die Konstante  $\underline{K}_n$  kann somit durch

$$\underline{K}_n = \left( L'_n + \frac{1}{j\omega} R'_n \right) \cdot 1 \text{ A} \quad (2.107)$$

dargestellt werden. Da  $R'_n$  und  $L'_n$  rein reelle Größen sind, gilt insbesondere

$$L'_n = \text{Re}(\underline{K}_n) \cdot 1 \text{ A} \quad (2.108)$$

sowie

$$R'_n = j\omega \cdot \text{Im}(\underline{K}_n) \cdot 1 \text{ A.} \quad (2.109)$$

Anders als die Konstanten der Leiter können die Vektorpotentiale auf den Randlelementen direkt physikalisch interpretiert werden. Sind diese Vektorpotentiale sowie deren Normalenableitungen und die Leiterkonstanten bekannt, ergibt sich aus den Beziehungen (2.68) bzw. (2.69) das Vektorpotential an einer beliebigen Stelle  $(x, y)$  in der  $xy$ -Ebene. Liegt der Punkt  $(x, y)$  innerhalb einer Leiterquerschnittsfläche, so ist Gleichung (2.68) zu verwenden. Dagegen gilt für einen Punkt  $(x, y)$  im Gebiet der Isolation die Gleichung (2.69).

Weitere Feldgrößen lassen sich aus dem Vektorpotential an der Stelle  $(x, y)$  bestimmen. Bildet man die Rotation des Vektorpotentials, ergibt sich nach Gleichung (2.8) die magnetische Induktion  $\underline{\vec{B}}$ . Für deren Berechnung ist hierzu jedoch die Ableitung durch Differenzbildung erforderlich, die bekanntlich numerische Probleme bereiten kann. Einfacher ist die Bestimmung der lokalen Stromdichte über die Gleichungen (2.12) und (2.16), wenn das Vektorpotential an der betreffenden Stelle ermittelt ist.

Besonders ist die Möglichkeit herauszustellen, Feldgrößen an beliebigen Stellen zu berechnen. Man ist nicht auf ein Raster festgelegt, sondern kann für dicht beieinander liegende Punkte unterschiedliche Vektorpotentiale und damit Magnetfelder oder Stromdichten erhalten. Natürlich ist die Genauigkeit der Rechnung von der Feinheit der Randlelemente abhängig, aber selbst für gröbste Diskretisierungen ergeben sich immer kontinuierliche Verläufe der Feldgrößen.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen jedoch weniger die konkreten Feldverläufe oder Stromverteilungen innerhalb eines Leistungstransformators, sondern vielmehr die im nächsten Kapitel beschriebene Berechnung der Streuinduktivitäten aus den korrespondierenden Konstanten  $[\underline{K}]$ .



### 3 Berechnung der Streu- und Nullinduktivitäten sowie der Kurzschlussverluste

Unter dem Streufluss eines Transformators versteht man in einer anschaulichen Erläuterung denjenigen Anteil des magnetischen Flusses, der nicht vollständig die Primär- und Sekundärwicklung umschließt. Dabei ist seine Größe direkt vom felderzeugenden Strom abhängig. Als ein exaktes Maß für den Zusammenhang zwischen Strom und Streufluss dient der Begriff der Streuinduktivität. Diese stellt im Falle eines sekundärseitigen Kurzschlusses zugleich die wesentliche Reaktanz eines Transformators dar. Deshalb wird sie auch als Kurzschlussreaktanz bezeichnet. Für die Auslegung von Netzen sind die Kurzschlussreaktanzen der Transformatoren von entscheidender Bedeutung.

In diesem Abschnitt sollen zunächst mit der Randelementmethode die induktiven Kopplungen zwischen den Wicklungen realer Leistungstransformatoren bestimmt werden. Daraus lassen sich dann deren Kurzschlussreaktanzen berechnen. Dabei zeigt sich, dass die numerisch ermittelten Werte zum Teil sehr gut mit Messwerten des Herstellers übereinstimmen. Dieses Ergebnisse bestätigen, dass die beschriebene Modellierung und Diskretisierung erlaubte Näherungen darstellen.

#### 3.1 Einphasige Zweiwicklungstransformatoren

Am Beispiel eines einphasigen Zweiwicklungstransformators wird erläutert, wie die induktiven Kopplungen mit der Randelementmethode bei einem ebenen Transformatorenmodell bestimmt werden können. Dazu wird ausführlich die numerische Berechnung mit der Randelementmethode erläutert. Prinzipiell ist das Verfahren bei anderen Transformatortypen identisch, so dass dort nur auf die Besonderheiten und Abweichungen eingegangen wird. Zunächst wird das bekannte einphasige Ersatzschaltbild erläutert.

##### 3.1.1 Ersatzschaltbild einphasiger Zweiwicklungstransformatoren

Oberspannungsseitig weise ein einphasiger Zweiwicklungstransformator die Windungszahl  $w_1$  und unterspannungsseitig die Windungszahl  $w_2$  auf. Wie in [13] abgeleitet ist, beschreiben die Systemgleichungen

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2, \quad \underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 \quad (3.1)$$

den Zusammenhang zwischen den ober- und unterspannungsseitigen Strömen und Spannungen. Darin stellen die Induktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  die Selbstinduktivitäten der beiden Spulen dar, während  $M$  als Gegeninduktivität den Koppelfluss bestimmt. Die aus diesen Induktivitäten abgeleiteten Reaktanzen  $X_{\sigma 1} = \omega(L_1 - M)$  und  $X_{\sigma 2} = \omega(L_2 - M)$  sowie die Hauptreaktanz  $X_h = \omega M$  bilden unter Vernachlässigung der ohmschen Widerstände das in Abbildung 3.1 dargestellte bekannte T-Ersatzschaltbild eines einphasigen Zweiwicklungstransformators.

Man definiert nach [14] magnetische Leitwerte  $\Lambda$  so, dass

$$L_1 = w_1^2 \Lambda_1(\omega), \quad L_2 = w_2^2 \Lambda_2(\omega), \quad M = w_1 w_2 \Lambda_{12}(\omega) \quad (3.2)$$

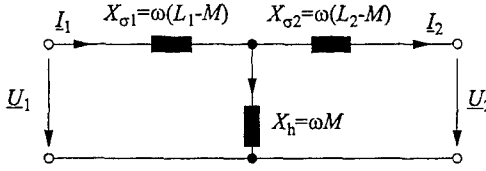


Bild 3.1: Einphasiges T-Ersatzschaltbild eines Zweiwicklungstransformators.

gilt. Es beschreiben  $\Lambda_1$  und  $\Lambda_2$  die magnetischen Leitwerte der Ober- und Unterspannungswicklung, die ein Maß für die Summe aus Koppel- und Streufluss bilden. Der Koppelleitwert  $\Lambda_{12}$  stellt nur den Koppelfluss dar. Aufgrund von Wirbelstromeffekten und damit zusammenhängenden Änderungen in den inneren Induktivitäten sind diese Leitwerte frequenzabhängig. Bei der hier vorgestellten Berechnungsmethode, die auf einer Feldlösung beruht, werden diese Abhängigkeiten berücksichtigt. Setzt man die Leitwerte in die Reaktanzen der Abbildung 3.1 ein, so ergeben sich mit

$$X_{\sigma 1} = \omega (w_1^2 \Lambda_1(\omega) - w_1 w_2 \Lambda_{12}(\omega)) \quad (3.3)$$

$$X_{\sigma 2} = \omega (w_2^2 \Lambda_2(\omega) - w_1 w_2 \Lambda_{12}(\omega)) \quad (3.4)$$

und

$$X_h = \omega w_1 w_2 \Lambda_{12}(\omega) \quad (3.5)$$

Reaktanzen, die physikalisch nicht zu interpretieren sind, da eine der beiden Reaktanzen  $X_{\sigma 1}$  oder  $X_{\sigma 2}$  negativ werden kann. Sie werden für den Spezialfall  $w_1 = w_2$  jedoch stets positiv. Dann gilt

$$X_{\sigma 1} = \omega w_1^2 (\Lambda_1(\omega) - \Lambda_{12}(\omega)) \quad (3.6)$$

$$X_{\sigma 2} = \omega w_1^2 (\Lambda_2(\omega) - \Lambda_{12}(\omega)) \quad (3.7)$$

und

$$X_h = \omega w_1^2 \Lambda_{12}(\omega). \quad (3.8)$$

Unter diesen Voraussetzungen beschreiben die Reaktanzen  $X_{\sigma 1}$  und  $X_{\sigma 2}$  die Streufelder, während  $X_h$  den Hauptfluss darstellt. Man definiert dann  $X_{\sigma 1}$  als primäre und  $X_{\sigma 2}$  als sekundäre Streureaktanz. Deren Summe

$$X_\sigma = X_{\sigma 1} + X_{\sigma 2} \quad (3.9)$$

heißt einfach Streureaktanz. Ihr entspricht die Streuinduktivität

$$L_\sigma = \frac{X_\sigma}{\omega}, \quad (3.10)$$

die bis in den kHz-Bereich nur sehr schwach von der Frequenz abhängig ist, wie die Abbildung 3.3 auf Seite 43 zeigt.

Um reale Transformatoren mit ungleichen Windungszahlen ober- und unterspannungsseitig mit diesen Begriffen beschreiben zu können, werden alle Größen auf die primärseitige Windungszahl  $w_1$  bezogen. In diesem Fall ist das Ersatzschaltbild 3.2 gültig. Mit  $\ddot{u} = \frac{w_1}{w_2}$  werden sekundärseitig Strom, Spannung sowie die Reaktanz nach den bekannten Regeln zu

$$\underline{I}'_2 = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_2 \quad (3.11)$$

$$\underline{U}'_2 = \ddot{u} \cdot \underline{U}_2 \quad (3.12)$$

sowie

$$X'_{\sigma 2} = \ddot{u}^2 \cdot X_{\sigma 2} \quad (3.13)$$

transformiert. Verwendet man diese Größen, so lassen sich die Koppelgleichungen (3.1) als

$$\underline{U}_1 = j\omega w_1^2 (\Lambda_{11} \underline{I}_1 - \Lambda_{12} \underline{I}'_2), \quad \underline{U}'_2 = j\omega w_1^2 (\Lambda_{12} \underline{I}_1 - \Lambda_{22} \underline{I}'_2), \quad (3.14)$$

schreiben. Damit sind die Gleichungen (3.6) bis (3.10) zur Berechnung der Streuinduktivität auch bei Transformatoren mit unterschiedlichen Windungszahlen anwendbar.

Messtechnisch erhält man die Streureaktanz bei einem Kurzschluss an der sekundären Wicklung – also  $\underline{U}'_2 = 0$  – als Eingangsreaktanz des Ersatzschaltbildes zu

$$X_k = X_{\sigma 1} + X'_{\sigma 2} \parallel X_h. \quad (3.15)$$

Beachtet man die Tatsache, dass die Hauptreaktanz  $X_h$  sehr viel größer ist als  $X_{\sigma 1}$  und  $X'_{\sigma 2}$ , so gilt die Näherung

$$X_k \approx X_{\sigma 1} + X'_{\sigma 2}. \quad (3.16)$$

Man bezeichnet  $X_k$  auch als Kurzschlussreaktanz. Häufig wird bei einem Transformator diese nicht selber angegeben, sondern vielmehr die relative Kurzschluss-Spannung  $u_k$ . Ihren induktiven Anteil  $u_x$  bestimmt man aus der Bemessungsspannung  $U_{rT}$  und der Bemessungsleistung  $S_{rT}$  des Transformators durch

$$u_x = \frac{S_{rT} \cdot X_k}{U_{rT}^2}. \quad (3.17)$$

Für den Fall, dass man in dieser Rechnung die ohmschen Verluste nicht vernachlässigt, ergibt sich zusätzlich zu dem induktiven Anteil der Kurzschluss-Spannung  $u_x$  noch der ohmsche Anteil  $u_r$ . Zusammen folgt für die relative Kurzschluss-Spannung

$$u_k^2 = u_r^2 + u_x^2. \quad (3.18)$$

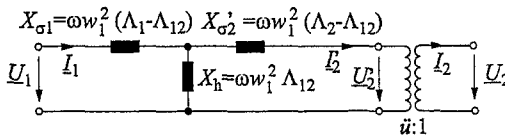


Bild 3.2: Einphasiges T-Ersatzschaltbild eines Zweiwicklungstransformators. Alle Größen sind auf die primärseitige Windungszahl  $w_1$  bezogen.

Alle drei Größen Streuinduktivität, Kurzschlussreaktanz und relative Kurzschluss-Spannung können leicht ineinander überführt werden. In dieser Arbeit soll die relative Kurzschluss-Spannung zur Beschreibung der Kurzschlussreaktanz bzw. Streuinduktivität dienen. Sie wird daher später zum Vergleich zwischen den berechneten und den vom Hersteller gemessenen Werten verwendet.

#### 3.1.2 Numerische Bestimmung der induktiven Kopplungen

Für die Berechnung der Streuinduktivität eines Transformators ist es notwendig, das Strom-Spannungs-Verhalten in einer Impedanzform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

darzustellen. Der Index 1 bezieht sich dabei auf die Oberspannung; unterspannungsseitige Größen sind mit 2 indiziert. Es sind zunächst die induktiven Kopplungen zwischen allen Leitern zu bestimmen. Da Induktivitäten nur zwischen Leiterschleifen definiert sind, werden alle modellierten Leiter zu Paaren zusammengefasst. Jede Windung, bestehend aus einem Hin- und einem Rückleiter, stellt ein Leiterpaar dar. Weil der Strom im Hinleiter durch den Rückleiter zurückfließt, ist die notwendige Eigenschaft (2.34) sichergestellt, dass die Stromsumme in der  $xy$ -Ebene verschwindet.

Induktive Kopplungen zwischen zwei Leiterpaaren sind anschaulich dadurch gekennzeichnet, dass eine Stromeinprägung in einem Leiterpaar einen Spannungsabfall in beiden Windungen bewirkt. Um sämtliche induktiven Kopplungen zwischen allen Leiterpaaren zu berechnen, muss in einer eigenen Rechnung in jede Windung ein Strom eingeprägt werden, während alle anderen stromlos bleiben.

Trotz der mitunter großen Zahl an modellierten Leitern und damit an Windungen lassen sich alle induktiven Kopplungen auf einmal berechnen, denn die Stromeinprägungen in die Leiter gehen nur in den Matrixblock  $[\mu I]$  ein. Dieser Block gehört zur Inhomogenität des linearen Gleichungssystems (2.88). So lässt sich jede Stromeinprägung als eine Spalte einer Matrix betrachten, die an die Stelle des inhomogenen Vektors tritt. Da der Gauß-Algorithmus bekanntlich die simultane Lösung mehrerer Gleichungssysteme erlaubt, die sich nur in der Inhomogenität unterscheiden, erhält man als Lösung des Gleichungssystems folglich eine Matrix mit ebenso vielen Spalten wie die Matrix der Inhomogenität. Jede Spalte stellt dann die Lösung für eine Stromeinprägung dar. In den Konstanten der Leiter, die – wie oben abgeleitet – die Spannungsabfälle entlang der Leiter beschreiben, steckt die gesamte benötigte Information. Deshalb muss das Gleichungssystem nur so weit gelöst werden, bis der Block mit den Leiterkonstanten bestimmt ist, wie es schon im Abschnitt 2.3.2 als teilweises Lösen des linearen Gleichungssystems beschrieben worden ist.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass bei einphasigen Zwe Wicklungstransformatoren die Leiterpaare aus Hin- und Rückleiter geometrisch eine Symmetrie aufweisen. Durch die Art der Stromeinprägung bleibt diese erhalten, weil jeweils der Strom auf der einen Seite hin- und auf der anderen zurückfließt.

Verwendet man eine Stromeinprägung von  $I = 1$  A bei der Berechnung der induktiven Kopplungen, so erhält man nach Ausführung der eben beschriebenen Rechnungen gemäß

Gleichung (2.107) eine auf die Länge bezogene Impedanzmatrix

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}'_{L,11} & \underline{Z}'_{L,12} & \cdots & \underline{Z}'_{L,1P} \\ \underline{Z}'_{L,21} & \underline{Z}'_{L,22} & \cdots & \underline{Z}'_{L,2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}'_{L,N1} & \underline{Z}'_{L,N2} & \cdots & \underline{Z}'_{L,NP} \end{pmatrix} = j\omega \begin{pmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} & \cdots & \underline{K}_{1P} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} & \cdots & \underline{K}_{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{K}_{N1} & \underline{K}_{N2} & \cdots & \underline{K}_{NP} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Mit  $N$  ist weiterhin die Anzahl der Leiter bezeichnet, während  $P = w_1 + w_2$  die Anzahl der Leiterpaare darstellt. Aufgrund des Eisenkerns gilt bei Transformatormodellen gewöhnlich  $N = 2P + 1$ .  $\underline{K}_{lp}$  ist die Konstante des Leiters  $l$  bei Stromeinprägung in der Windung  $p$ . Analog dazu bezeichnet  $\underline{Z}'_{L,lp}$  die bezogene Impedanz des Leiters  $l$  bei dieser Stromeinprägung.

In einem zweiten Schritt werden aus den Impedanzen der Leiter die Impedanzen der Windungen bestimmt. Dazu benötigt man die Zuordnung von Leitern zu Paaren. Es soll die Funktion  $\pi_1(p)$  den Hinleiter und  $\pi_2(p)$  den Rückleiter des Leiterpaares  $p$  angeben. Die bezogene Impedanz eines Leiterpaares ergibt sich aus Gleichung (3.20) jedoch nicht einfach als Summe der beiden Leiterimpedanzen, sondern als Differenz. Man muss die entgegengesetzte Stromrichtung im Rückleiter beachten. Während für die Leiterkonstanten eine Stromrichtung von vorn nach hinten positiv definiert ist, fließt in einem der beiden Leiter des betrachteten Paares der Strom entgegengesetzt. Definitionsgemäß soll dieses der Rückleiter sein. Es gilt für die Impedanz  $\underline{Z}'_{W,pq}$  der Windung  $p$  bei Stromeinprägung in Windung  $q$  deshalb

$$\underline{Z}'_{W,pq} = \underline{Z}'_{L,\pi_1(p)q} - \underline{Z}'_{L,\pi_2(p)q} \quad (3.21)$$

bzw. unter Verwendung der Impedanzform (3.20)

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}'_{W,11} & \underline{Z}'_{W,12} & \cdots & \underline{Z}'_{W,1P} \\ \underline{Z}'_{W,21} & \underline{Z}'_{W,22} & \cdots & \underline{Z}'_{W,2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}'_{W,P1} & \underline{Z}'_{W,P2} & \cdots & \underline{Z}'_{W,PP} \end{pmatrix} = j\omega \begin{pmatrix} \underline{K}_{\pi_1(1),1} - \underline{K}_{\pi_2(1),1} & \underline{K}_{\pi_1(1),2} - \underline{K}_{\pi_2(1),2} & \cdots & \underline{K}_{\pi_1(1),P} - \underline{K}_{\pi_2(1),P} \\ \underline{K}_{\pi_1(2),1} - \underline{K}_{\pi_2(2),1} & \underline{K}_{\pi_1(2),2} - \underline{K}_{\pi_2(2),2} & \cdots & \underline{K}_{\pi_1(2),P} - \underline{K}_{\pi_2(2),P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{K}_{\pi_1(P),1} - \underline{K}_{\pi_2(P),1} & \underline{K}_{\pi_1(P),2} - \underline{K}_{\pi_2(P),2} & \cdots & \underline{K}_{\pi_1(P),P} - \underline{K}_{\pi_2(P),P} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Der Spannungsabfall entlang des Eisens ist in dieser Matrix nicht mehr enthalten. Nur die bezogenen Impedanzen der  $P$  Windungen bei den verschiedenen Stromeinprägungen werden weiterhin betrachtet.

Im Folgenden müssen nun die Impedanzen entsprechend ihrer Verschaltung zu einer Impedanzform wie Gleichung (3.19) zusammengefasst werden. Bei einer einfachen Spule sind alle Windungen in Reihe geschaltet. In Leistungstransformatoren können jedoch auch Teile der Wicklung parallel geschaltet sein. Zum Beispiel bei der Verwendung von Drill-Leitern hat man etwa 20 parallele Stränge in der Wicklung. Es ist also nötig, sowohl Reihen- als auch Parallelschaltungen von Windungen beherrschen zu können.

Als erstes betrachtet man zwei Windungen 1 und 2, die in Reihe geschaltet sind. Aus Gleichung (3.22) kann man die Spannung  $\underline{U}_n$  über den Windungen durch

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \vdots \\ \underline{U}_P \end{pmatrix} = l \cdot \left( \begin{array}{cc|ccc} \underline{Z}'_{W,11} & \underline{Z}'_{W,12} & \underline{Z}'_{W,13} & \cdots & \underline{Z}'_{W,1P} \\ \underline{Z}'_{W,21} & \underline{Z}'_{W,22} & \underline{Z}'_{W,23} & \cdots & \underline{Z}'_{W,2P} \\ \underline{Z}'_{W,31} & \underline{Z}'_{W,32} & \underline{Z}'_{W,33} & \cdots & \underline{Z}'_{W,3P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}'_{W,P1} & \underline{Z}'_{W,P2} & \underline{Z}'_{W,P3} & \cdots & \underline{Z}'_{W,PP} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \vdots \\ \underline{I}_P \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

aus den Windungsströmen bestimmt werden. Die Länge der Windungen ist mit  $l$  gekennzeichnet. Auf ihre Bestimmung wird im nächsten Abschnitt genauer eingegangen. Die aus der Reihenschaltung der Windungen 1 und 2 entstandene Doppelwindung wird mit 1' indiziert. Es fließt der Strom  $\underline{I}_{1'} = \underline{I}_1 = \underline{I}_2$ . Für die Spannung an der Windung  $n$  folgt damit

$$\begin{aligned} \underline{U}_n &= l \cdot (\underline{Z}'_{W,n1} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}'_{W,n2} \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}'_{W,n3} \cdot \underline{I}_3 + \cdots + \underline{Z}'_{W,nP} \cdot \underline{I}_P) \\ &= l \cdot ((\underline{Z}'_{W,n1} + \underline{Z}'_{W,n2}) \cdot \underline{I}_{1'} + \underline{Z}'_{W,n3} \cdot \underline{I}_3 + \cdots + \underline{Z}'_{W,nP} \cdot \underline{I}_P). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dieses bedeutet nichts anderes, als dass die ersten beiden Spalten der Impedanzmatrix in Gleichung (3.23) addiert werden, und die Summe die beiden ursprünglichen Spalten ersetzt, wobei die Dimension des Stromvektors um Eins reduziert werden muss.

Um auch noch im Spannungsvektor die Reduktion durchzuführen, berechnet man den Spannungsabfall über der Reihenschaltung der Windungen 1 und 2. Dieser beträgt

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1'} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\ &= l \cdot ((\underline{Z}'_{W,11} + \underline{Z}'_{W,12}) \cdot \underline{I}_{1'} + \underline{Z}'_{W,13} \cdot \underline{I}_3 + \cdots + \underline{Z}'_{W,1P} \cdot \underline{I}_P) + \\ &\quad l \cdot ((\underline{Z}'_{W,21} + \underline{Z}'_{W,22}) \cdot \underline{I}_{1'} + \underline{Z}'_{W,23} \cdot \underline{I}_3 + \cdots + \underline{Z}'_{W,2P} \cdot \underline{I}_P) \\ &= l \cdot ((\underline{Z}_{W,11} + \underline{Z}_{W,12} + \underline{Z}_{W,21} + \underline{Z}_{W,22}) \cdot \underline{I}_{1'} + \\ &\quad (\underline{Z}_{W,13} + \underline{Z}_{W,23}) \cdot \underline{I}_3 + \cdots + (\underline{Z}_{W,1P} + \underline{Z}_{W,2P}) \cdot \underline{I}_P). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Hier werden die ersten beiden Zeilen addiert, womit die Anzahl der Zeilen reduziert wird. Insgesamt ergibt sich nach der Ausführung der Reihenschaltung mit

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{1'} \\ \underline{U}_3 \\ \vdots \\ \underline{U}_P \end{pmatrix} = l \cdot \left( \begin{array}{cc|ccc} \underline{Z}'_{W,11} + \underline{Z}'_{W,12} + \underline{Z}'_{W,21} + \underline{Z}'_{W,22} & \underline{Z}'_{W,13} + \underline{Z}'_{W,23} & \cdots & \underline{Z}'_{W,1P} + \underline{Z}'_{W,2P} \\ \underline{Z}'_{W,31} + \underline{Z}'_{W,32} & \underline{Z}'_{W,33} & \cdots & \underline{Z}'_{W,3P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}'_{W,P1} + \underline{Z}'_{W,P2} & \underline{Z}'_{W,P3} & \cdots & \underline{Z}'_{W,PP} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_{1'} \\ \underline{I}_3 \\ \vdots \\ \underline{I}_P \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

eine Impedanzform, die aus Gleichung (3.23) durch Addition der durch Linien abgetrennten Zeilen und Spalten folgt. Auf diese Weise können nacheinander alle Reihenschaltungen zusammengefasst werden. Sind auch Parallelschaltungen zu berücksichtigen, ist es sinnvoll,

von der Impedanz- auf die Admittanzform zu wechseln. Dazu muss die Impedanzmatrix invertiert werden. In der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} & \cdots & \underline{Y}_{1n} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} & \cdots & \underline{Y}_{2n} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} & \cdots & \underline{Y}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Y}_{n1} & \underline{Y}_{n2} & \underline{Y}_{n3} & \cdots & \underline{Y}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

sollen wiederum die ersten beiden Windungen bzw. Windungsblöcke, falls schon Reihenschaltungen durchgeführt worden sind, zusammengefasst werden. Spannungen über einer Parallelschaltung sind identisch, so dass  $\underline{U}_{1'} = \underline{U}_1 = \underline{U}_2$  gilt. Damit ergibt sich für den Strom in der Windung  $m$

$$\begin{aligned} \underline{I}_m &= \underline{Y}_{m1} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{m2} \cdot \underline{U}_2 + \underline{Y}_{m3} \cdot \underline{U}_3 + \cdots + \underline{Y}_{mn} \cdot \underline{U}_n \\ &= (\underline{Y}_{m1} + \underline{Y}_{m2}) \cdot \underline{U}_{1'} + \underline{Y}_{m3} \cdot \underline{U}_3 + \cdots + \underline{Y}_{mn} \cdot \underline{U}_n. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Wie bei der Reihenschaltung müssen auch hier die Spalten addiert werden, die beide Windungen betreffen. Ebenfalls analog zur Reihenschaltung erfolgt die Addition der Zeilen. Dabei gilt für den Gesamtstrom in der Parallelschaltung

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1'} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ &= (\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12}) \cdot \underline{U}_{1'} + \underline{Y}_{13} \cdot \underline{U}_3 + \cdots + \underline{Y}_{1n} \cdot \underline{U}_n + \\ &\quad (\underline{Y}_{21} + \underline{Y}_{22}) \cdot \underline{U}_{1'} + \underline{Y}_{23} \cdot \underline{U}_3 + \cdots + \underline{Y}_{2n} \cdot \underline{U}_n \\ &= (\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21} + \underline{Y}_{22}) \cdot \underline{U}_{1'} + (\underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{23}) \cdot \underline{U}_3 + \cdots + (\underline{Y}_{1n} + \underline{Y}_{2n}) \cdot \underline{U}_n. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nach Ausführung der Parallelschaltung wird das System der Windungen durch den Ausdruck

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_{1'} \\ \underline{I}_3 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21} + \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{23} & \cdots & \underline{Y}_{1n} + \underline{Y}_{2n} \\ \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} & \cdots & \underline{Y}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Y}_{n1} + \underline{Y}_{n2} & \underline{Y}_{n3} & \cdots & \underline{Y}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_{1'} \\ \underline{U}_3 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

beschrieben. Für den Übergang zu der neuen Impedanzform muss die Admittanzmatrix wiederum invertiert werden.

Durch wiederholtes Anwenden von Parallelschaltungen oder Reihenschaltungen kann man alle Windungen so weit zusammenfassen, dass nur noch die Ober- und die Unterspannungswicklung als Ganzes übrig bleiben. Die Impedanzform nimmt damit die gesuchte Gestalt nach Gleichung (3.19) an. Aus dieser Gleichung kann dann wie im Folgenden beschrieben die Streuinduktivität bestimmt werden.

#### 3.1.3 Streuinduktivität eines einphasigen Zweiwicklungstransformators

Aus den induktiven Kopplungen der Windungen ist eine Impedanzdarstellung der Form (3.19) bestimmt worden, die das Strom-Spannungsverhalten der Wicklungen beschreibt. Löst man die Impedanzen gemäß  $\underline{Z} = l \cdot (R' + j\omega L')$  auf, so kann man stattdessen

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = l \cdot \begin{pmatrix} R'_{11} + j\omega L'_{11} & R'_{12} + j\omega L'_{12} \\ R'_{21} + j\omega L'_{21} & R'_{22} + j\omega L'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

schreiben. Dieses entspricht bis auf die ohmschen Anteile den Systemgleichungen (3.1), die am Anfang des Kapitels als Ausgangspunkt der Streuinduktivitätsberechnung gedient haben. Aus den bezogenen Induktivitäten der Gleichung (3.31) ergeben sich mit

$$\Lambda'_{ij} = \frac{1}{w_i w_j} \cdot L'_{ij} \quad (3.32)$$

die korrespondierenden Leitwerte. Mit ihnen bestimmt man wegen Gleichung (3.9) die Streu- bzw. Kurzschlussreaktanz zu

$$X_k = \omega l \cdot w_1^2 \cdot (\Lambda'_{11} - \Lambda'_{21} + \Lambda'_{22} - \Lambda'_{12}). \quad (3.33)$$

Anschließend kann aus  $X_k$  die Streuinduktivität durch Gleichung (3.10) und die relative Kurzschluss-Spannung durch Gleichung (3.17) ermittelt werden. Beachtet man zusätzlich noch die ohmschen Anteile in Gleichung (3.31), so ist die Aufspaltung der relativen Kurzschluss-Spannung  $u_k$  in  $u_x$  und  $u_r$  möglich.

Es fehlt nun noch die Windungslänge  $l$  zur vollständigen Bestimmung der Streuinduktivität aus einem zweidimensionalen Transformatormodell mit der Randelementmethode. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Streuinduktivität zunächst innerhalb des Modells berechnet werden muss, um danach den Übergang auf einen realen Transformator zu erreichen, indem man mit der Windungslänge multipliziert. Wenn man zuerst die Induktivitäten der einzelnen Windungen mit ihrer realen Länge multipliziert und dann zur Streuinduktivität zusammenfasst, wird die berechnete Streuinduktivität von den Längenunterschieden der Windungen bestimmt und nicht von den um Größenordnungen kleineren Induktivitätsunterschieden, die aus ihrer geometrischen Lage folgen. Um den Einfluss des Abwicklungsfehlers zu begrenzen, ist es notwendig, wie bereits stillschweigend erfolgt, mit einer mittleren Windungslänge zu rechnen.

Der einfachste Ansatz für eine gemeinsame Länge aller Leiter besteht in einer Mittelung der tatsächlichen Windungslängen der nachgebildeten Leiter. Nachteilig daran ist, dass die gesuchte Windungslänge extrem von der Modellierung der Wicklungen abhängig wird und üblicherweise damit auch nicht genau genug ist: Bildet man nämlich viele Leiter in der Unterspannungs- und nur wenige in der Oberspannungswicklung nach, so wird diese mittlere Länge kleiner sein als in einem Modell, in dem genau umgekehrt mehr Leiter in der Oberspannungs- als in der Unterspannungswicklung vorhanden sind.

Eine solche Abhängigkeit kann man jedoch umgehen, wenn man die Leiterlängen gemäß ihrer magnetischen Energie gewichtet mittelt. Die magnetische Energie einer Windung  $i$  beträgt

$$W_i = \frac{1}{2} l_i L'_i I_i^2, \quad (3.34)$$



wobei  $l_i$  die reale Windungslänge,  $L_i'$  die auf die Länge bezogene Gesamtinduktivität und  $I_i$  den in der Windung fließenden Strom bezeichnet. Gegebenenfalls muss dieser Strom um einen Faktor korrigiert werden, wenn ein Modell-Leiter mehr als eine Windung in der Realität darstellen soll. Um das gleiche Feld zu bewirken, muss der Strom im Modell-Leiter mit der Anzahl der durch ihn nachgebildeten Leiter multipliziert werden. Mit der nach der magnetischen Energie gewichteten Länge

$$l_{eg} = \frac{\sum_{i=1}^w l_i L_i' I_i^2}{\sum_{i=1}^w L_i' I_i^2} \quad (3.35)$$

wird die einfache geometrische Mittelung um teilweise über 10 % korrigiert. Angesichts der Tatsache, dass die berechneten Streuinduktivitäten oft nur wenige Prozent von Messwerten abweichen, wird deutlich, wie wichtig die richtige Wahl der mittleren Länge ist. Da sich die energiegewichtete Länge in dieser Hinsicht bewährt hat, wird

$$l = l_{eg} \quad (3.36)$$

als mittlere Windungslänge zur Streuinduktivitätsberechnung verwendet.

An dieser Stelle soll ein Vergleich zum Verfahren von Rogowski gezogen werden (vgl. [1]). In diesem spielt die Berechnung der mittleren Länge eine ebenso wichtige Rolle wie bei der Verwendung der Randlelementmethode. Während in der ursprünglichen Rechnung die Wicklungen einlagig sind, so dass deren Länge verwendet werden kann, stößt man bei der Übertragung von Rogowskis Methode auf moderne Leistungstransformatoren auf die gleichen Probleme wie oben. In der industriellen Transformatorauslegung behilft man sich mit Erfahrungsfaktoren. Diese sind durch Vergleiche mit Messreihen bisheriger Ausführungen ermittelt und korrigieren zugleich auch die in der Rogowski-Theorie enthaltenen Modellvereinfachungen. Herausgestellt sei, dass bei dem hier beschriebenen Verfahren ohne Kenntnis von Erfahrungswerten die Streuinduktivitäten numerisch bestimmt werden können. Bevor die Berechnung der Streu- und Nullinduktivitäten von dreiphasigen Zweiwicklungstransformatoren beschrieben wird, sollen noch die Kurzschlussverluste untersucht werden.

### 3.1.4 Berechnung der Transformatorverluste

Die wesentlichen Verlustkomponenten eines Transformators bilden die Eisen- sowie die Kurzschlussverluste, vgl. dazu auch [15]. Unter den Eisen- bzw. Leerlaufverlusten versteht man die Verluste, die durch Hysterese und Wirbelströme im Eisenkern entstehen. Da in dem hier verwendeten zweidimensionalen Modell die Blechung des Eisenkerns durch ein Herabsenken der Leitfähigkeit des Eisens nachgebildet wird, ließen sich die Wirbelstromverluste zwar noch bei richtiger Wahl der Leitfähigkeit bestimmen. Hystereseverluste können jedoch nicht erfasst werden, da mit einem konstanten  $\mu_r$  gerechnet wird. Deshalb sollen die Eisenverluste in dieser Arbeit nicht betrachtet werden.

Alle anderen Verluste werden zu den Kurzschlussverlusten  $P_k$  zusammengefasst. Sie setzen sich aus den sogenannten Gleichstrom- und den Zusatzverlusten zusammen. Als Gleichstromverluste  $P_G$  werden die ohmschen Verluste der Wicklungen und Zuleitungen bezeichnet, die bei Gleichströmen in Höhe der Betriebsströme entstehen. In die Zusatzverluste  $P_Z$  gehen die bei Wechselströmen entstehenden Wirbelstromverluste ein. Zu diesen werden auch

Verluste durch Kreisströme in parallelen Leitern und durch in weiteren leitenden Bauteilen wie dem Kessel induzierte Ströme gezählt.

Bei der Berechnung der Kurzschluss-Spannung sind, wie oben beschrieben, die ohmschen Anteile in Gleichung (3.31) zu beachten. So ergibt sich neben dem rein induktiven Anteil  $u_x$  der Kurzschluss-Spannung auch ein Verlustanteil  $u_r$ , der den Anteil der Bemessungsspannung des Transformators angibt, der im Kurzschlussfall für die Verluste maßgebend ist. Durch

$$P_k = \frac{u_r}{100 \%} \cdot S_{rT} \quad (3.37)$$

können die Kurzschlussverluste  $P_k$  aus der Bemessungsleistung  $S_{rT}$  bestimmt werden. Weiterhin können die Gleichstromverluste allein aus der Geometrie und den physikalischen Daten der Windungen berechnet werden. Kennt man die Länge  $l$  und den Querschnitt  $A$  einer Windung sowie deren Leitfähigkeit  $\sigma$ , ergibt sich daraus der ohmsche Gleichstromwiderstand zu

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot A}. \quad (3.38)$$

Eine Zusammenfassung der Windungen gemäß ihrer Verschaltung liefert dann den Gesamtwiderstand einer Spule. Bei einer Auswertung der Messwerte ist jedoch darauf zu achten, dass in der Praxis nicht der Widerstand einer Spule, sondern derjenige zwischen zwei Anschlussklemmen gemessen wird. Bei einer Drehstromwicklung in Sternschaltung erhält man daher immer den Widerstand zweier Spulen. Bei einer Dreiecksschaltung ergibt sich zwischen zwei Anschlussklemmen eine Parallelschaltung aus einer Spule mit der Reihenschaltung der anderen beiden. In diesem Fall liegt der Messwert nur bei

$$R \parallel 2R = \frac{2}{3}R, \quad (3.39)$$

wenn  $R$  den Widerstand einer Spule darstellt. Mit den Widerständen  $R_1$  und  $R_2$  der Ober- und Unterspannungswicklung ergeben sich die Gleichstromverluste für Drehstromtransformatoren zu

$$P_G = 3 \cdot R_1 I_1^2 + 3 \cdot R_2 I_2^2. \quad (3.40)$$

Für die Berechnung der Gleichstromverluste benötigt man somit keine Feldberechnung. Aus ihnen kann man die Zusatzverluste  $P_Z$  als Differenz

$$P_Z = P_k - P_G \quad (3.41)$$

bestimmen. Zusätzlich bieten die Gleichstromverluste bzw. der Gleichstromwiderstand noch die Möglichkeit zu überprüfen, wie realitätsnah das berechnete Modell ist. Eine Untersuchung über die Konvergenz der berechneten Impedanzmatrix bei erhöhter Randlementezahl wird im nächsten Abschnitt vorgenommen.

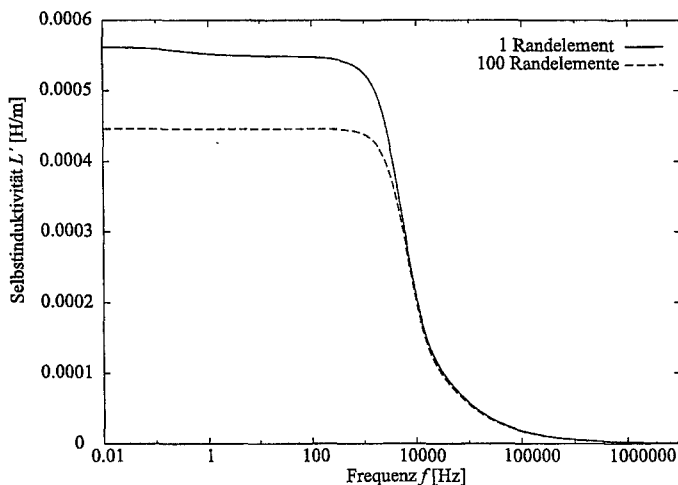


Bild 3.3: Selbstinduktivität der Oberspannungswicklung eines einfachen Transformatormodells bei einem und 100 Randelementen.

### 3.1.5 Konvergenzverhalten der berechneten Impedanzmatrix

Bisher ist erläutert worden, wie die induktiven Kopplungen eines zweidimensionalen Transformatormodells numerisch bestimmt werden können. An dieser Stelle soll nun untersucht werden, in welchem Umfang die Anzahl der Randelemente und somit die Feinheit der Diskretisierung das Verfahren beeinflusst. Sofern sich eine merkliche Abhängigkeit ergibt, ist das bei der Interpretation der Resultate zu berücksichtigen. Es sei zusätzlich noch darauf hingewiesen, dass in [3] die Übereinstimmung von Ergebnissen der Randelementmethode mit analytisch berechneten Größen an einigen Beispielen bereits gezeigt worden ist.

Ein typisches Verhalten der berechneten Induktivitäten zeigt die Abbildung 3.3. Es wird die Selbstinduktivität der Oberspannungswicklung eines einphasigen Transformatormodells mit jeweils nur einem nachgebildeten Leiter in Unter- und Oberspannungswicklung für zwei verschiedene Randelementzahlen verglichen. In der ersten Rechnung werden alle Ränder des Modells mit einem Randelement pro Seite nachgebildet. Die zweite Rechnung ist dann mit jeweils 100 Randelementen je Seite durchgeführt worden. Als drittes ist eine Kombination aus den beiden anderen Modellen betrachtet worden. Dabei enthielten die Ränder der Wicklungen ein Randelement pro Seite, während jeweils 100 auf den Seiten der Eisenkernränder verteilt worden sind. In der Abbildung 3.4 ist das zugehörige Modell dargestellt.

Deutlich erkennbar ist der theoretisch zu erwartende Frequenzgang der Selbstinduktivität in Abbildung 3.3, der mit 100 Randelementen je Seite berechnet worden ist. Bei kleinen Frequenzen bis knapp unter 1 kHz bleibt diese konstant, während sie dann mit zunehmender Frequenz asymptotisch auf Null abfällt. Zwar zeigt die mit nur einem Randelement pro Seite berechnete Kurve einen prinzipiell ähnlichen Verlauf, jedoch sind zwei wichtige Unterschiede festzuhalten. Zum einen liegen die berechneten Induktivitäten unterhalb von 1 kHz bis zu 20 % über den mit 100 Randelementen pro Seite berechneten, zum anderen gibt es um 1 Hz herum ein leichtes Absinken der Selbstinduktivität. Bei größeren Frequenzen stimmen beide

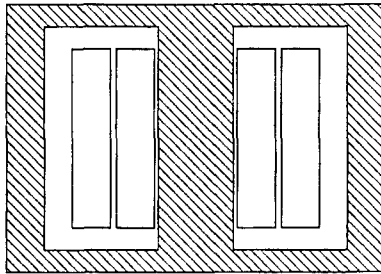


Bild 3.4: Einfaches einphasiges Transformatormodell für die Konvergenzuntersuchung.

Kurven dann aber wieder gut überein. Eine Berechnung der oben beschriebenen dritten Modellierung ergibt keine Unterschiede zu genauen Nachbildung mit 100 Randelementen auf allen Leiterseiten.

Damit zeigt sich, dass physikalisch eine genaue Nachbildung des Eisenkerns besonders wichtig ist, da dieser über die Stärke des Hauptfeldes im Transformator entscheidet. Bezüglich der Induktivitätsbestimmung ist es ausreichend, den Eisenkern mit hinreichend kleinen Randelementen nachzubilden. Ob die Leiter so genau modelliert werden, ist selbst für die hier betrachteten großen Leiter nicht von Bedeutung.

Ebenso deutlich unterscheiden sich die Beispielrechnungen, wenn man die Wirkwiderstände einschließlich der Wirbelströme betrachtet. Wiederum für den Transformator aus Abbildung 3.4 ist der Wirkwiderstand der Oberspannungswicklung in der Abbildung 3.5 dargestellt. Sowohl für die Berechnung mit einem wie auch mit 100 Randelementen pro Seite ergibt sich für Frequenzen um 0,01 Hz der Gleichstromwiderstand. Während jedoch bei dem fein

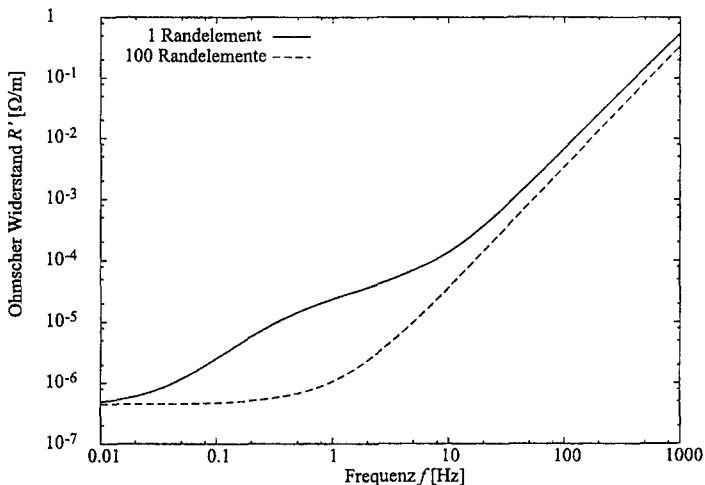


Bild 3.5: Ohmscher Widerstand der Oberspannungswicklung eines einfachen Transformatormodells bei einem und 100 Randelementen.

diskretisierten Modell der Wirkwiderstand theoriegemäß zunächst nur sehr langsam ansteigt, werden mit dem Modell mit nur einem Randelement pro Seite bei niedrigen Frequenzen bis zu hundertfach zu große Widerstände bestimmt. Mit zunehmender Frequenz nähert sich die Kurve dann sehr langsam der mit 100 Randelementen berechneten an.

Auch hier zeigt die gemischte dritte Modellierung keine wesentlich Abweichung von der fein diskretisierten. Der berechnete Frequenzgang des Widerstandes liegt nur geringfügig über der Kurve für 100 Randelemente auf jeder Seite. Damit kann man festhalten, dass auch für die Widerstände eine Diskretisierung mit jeweils einem Randelement pro Leiterseite ausreicht, wenn die Anzahl der Randelemente auf dem Eisenkern groß genug ist.

Insgesamt zeigt sich eine ausgeprägte Abhängigkeit der Rechenergebnisse von der Feinheit der Diskretisierung. Dieses ist für numerische Verfahren nicht ungewöhnlich, muss jedoch bei der Interpretation berücksichtigt werden. Da gerade bei umfangreichen Modellen mit vielen Leitern die Zahl der Randelemente pro Leiter nicht beliebig erhöht werden kann, muss dort mit Abweichungen in der hier geschriebenen Größenordnung gerechnet werden. Umso erstaunlicher ist es, dass die Streuinduktivitäten – wie unten beschrieben – bei Modellen mit wenigen Randelementen wie auch solchen mit deutlich mehr Randelementen quasi konstant sind und nur geringfügig von den Messwerten differieren. Zunächst sollen die Berechnungen jedoch noch auf dreiphasige Transformatoren ausgedehnt werden.

## 3.2 Dreiphasige Zwe Wicklungstransformatoren

Bei der Modellierung von Drehstromtransformatoren hat man bei gleicher Darstellung der Wicklungen die dreifache Menge an Leitern gegenüber einphasigen Transformatoren nachzubilden. Es kommt hinzu, dass die bei einphasigen Modellen vorhandene Symmetrie hier nicht mehr gegeben sein kann. Wie in Abbildung 2.5c dargestellt, ist die gesamte Anordnung nur geometrisch symmetrisch, jedoch nicht in Bezug auf ihre Wicklungszugehörigkeit. Bei einer Stromeinprägung in eine Windung z.B. im rechten Strang fließt der Strom im rechten Fenster hin und außerhalb des Eisenkerns rechts vom äußeren Schenkel zurück.

Wegen der fehlenden Symmetrie ist bei dreiphasigen Modellen somit gleich die sechsfache Menge an Leitern gegenüber vergleichbaren einphasigen Modellen zu behandeln. Bei linearen Gleichungssystemen wächst der benötigte Speicherplatz etwa mit dem Quadrat, die Rechenzeit mit der dritten Potenz der Gleichungszahl. Man kann somit nur einen Bruchteil der Detailgenauigkeit eines einphasigen Modells erreichen. Deshalb sollen dreiphasige mit entsprechenden einphasigen Modellen verglichen werden, um festzustellen, ob man die detaillierteren einphasigen Nachbildungen zur Streuinduktivitätsberechnung von dreiphasigen Drehstromtransformatoren verwenden kann.

### 3.2.1 Berechnung des dreiphasigen Kurzschlussversuchs

Im Gegensatz zu [3] wird die Streuinduktivität eines Zwe Wicklungsdrehstromtransformators in dieser Arbeit aus der Nachbildung des dreiphasigen Kurzschlussversuchs bestimmt. Die Grundlage der Berechnung bildet das vereinfachte einphasige Ersatzschaltbild in Abbildung 3.6 nach [13]. Analog zum einphasigen Transformator werden zunächst die induktiven Kopplungen bestimmt. Die Berechnung verläuft wie im Abschnitt 3.1.3 beschrieben. Der entscheidende Unterschied besteht allerdings darin, dass hier jetzt sechs statt zwei Wick-

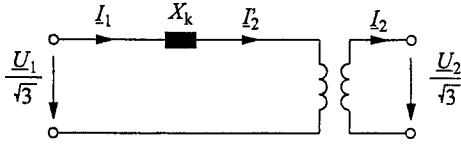


Bild 3.6: Vereinfachtes einphasiges Ersatzschaltbild eines Drehstromtransformators.

lungen vorhanden sind. Die Impedanzform

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{OS,1} \\ \underline{U}_{OS,2} \\ \underline{U}_{OS,3} \\ \underline{U}_{US,1} \\ \underline{U}_{US,2} \\ \underline{U}_{US,3} \end{pmatrix} = l_{eg} \cdot \begin{pmatrix} \underline{Z}'_{11} & \underline{Z}'_{12} & \underline{Z}'_{13} & \underline{Z}'_{14} & \underline{Z}'_{15} & \underline{Z}'_{16} \\ \underline{Z}'_{21} & \underline{Z}'_{22} & \underline{Z}'_{23} & \underline{Z}'_{24} & \underline{Z}'_{25} & \underline{Z}'_{26} \\ \underline{Z}'_{31} & \underline{Z}'_{32} & \underline{Z}'_{33} & \underline{Z}'_{34} & \underline{Z}'_{35} & \underline{Z}'_{36} \\ \underline{Z}'_{41} & \underline{Z}'_{42} & \underline{Z}'_{43} & \underline{Z}'_{44} & \underline{Z}'_{45} & \underline{Z}'_{46} \\ \underline{Z}'_{51} & \underline{Z}'_{52} & \underline{Z}'_{53} & \underline{Z}'_{54} & \underline{Z}'_{55} & \underline{Z}'_{56} \\ \underline{Z}'_{61} & \underline{Z}'_{62} & \underline{Z}'_{63} & \underline{Z}'_{64} & \underline{Z}'_{65} & \underline{Z}'_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_{OS,1} \\ \underline{I}_{OS,2} \\ \underline{I}_{OS,3} \\ \underline{I}_{US,1} \\ \underline{I}_{US,2} \\ \underline{I}_{US,3} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

weist somit die Dimension sechs auf. Als Leiterlänge wird die bereits diskutierte energiegewichtete Windungslänge  $l_{eg}$  verwendet.

Am einfachsten stellt man den Kurzschlussversuch durch einen Übergang auf die Admittanzform dar. Oberspannungsseitig wird ein symmetrisches Spannungssystem eingepreßt, die Unterspannungswicklungen sind kurzgeschlossen. Mit  $\underline{\alpha} = e^{j120^\circ}$  gilt dann

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_{OS,1} \\ \underline{I}_{OS,2} \\ \underline{I}_{OS,3} \\ \underline{I}_{US,1} \\ \underline{I}_{US,2} \\ \underline{I}_{US,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} & \underline{Y}_{14} & \underline{Y}_{15} & \underline{Y}_{16} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} & \underline{Y}_{24} & \underline{Y}_{25} & \underline{Y}_{26} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} & \underline{Y}_{34} & \underline{Y}_{35} & \underline{Y}_{36} \\ \underline{Y}_{41} & \underline{Y}_{42} & \underline{Y}_{43} & \underline{Y}_{44} & \underline{Y}_{45} & \underline{Y}_{46} \\ \underline{Y}_{51} & \underline{Y}_{52} & \underline{Y}_{53} & \underline{Y}_{54} & \underline{Y}_{55} & \underline{Y}_{56} \\ \underline{Y}_{61} & \underline{Y}_{62} & \underline{Y}_{63} & \underline{Y}_{64} & \underline{Y}_{65} & \underline{Y}_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_{OS,1} \\ \underline{\alpha} \cdot \underline{U}_{OS,1} \\ \underline{\alpha}^2 \cdot \underline{U}_{OS,1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Die oberspannungsseitigen Ströme ergeben sich im Kurzschlussfall zu

$$\underline{I}_{OS,1} = (\underline{Y}'_{11} + \underline{\alpha} \cdot \underline{Y}'_{12} + \underline{\alpha}^2 \cdot \underline{Y}'_{13}) \cdot \underline{U}_{OS,1}, \quad (3.44)$$

$$\underline{I}_{OS,2} = (\underline{Y}'_{21} + \underline{\alpha} \cdot \underline{Y}'_{22} + \underline{\alpha}^2 \cdot \underline{Y}'_{23}) \cdot \underline{U}_{OS,1} \quad (3.45)$$

sowie

$$\underline{I}_{OS,3} = (\underline{Y}'_{31} + \underline{\alpha} \cdot \underline{Y}'_{32} + \underline{\alpha}^2 \cdot \underline{Y}'_{33}) \cdot \underline{U}_{OS,1}. \quad (3.46)$$

Dabei ist es nicht problematisch, dass nur ein Teil der Admittanzmatrix Verwendung findet. Bei der Bestimmung bereits eines Elementes der Admittanzmatrix wird die gesamte Impedanzmatrix benötigt. Es gehen also alle induktiven Kopplungen der Impedanzmatrix in diese Kurzschluss-Ströme ein. Für  $i = 1, 2, 3$  ergibt sich aus

$$\underline{Z}_{k,i} = \frac{\underline{U}_{OS,1}}{\underline{I}_{OS,i}} = \frac{1}{(\underline{Y}'_{i1} + \underline{\alpha} \cdot \underline{Y}'_{i2} + \underline{\alpha}^2 \cdot \underline{Y}'_{i3})} \quad (3.47)$$

für jeden der drei Wicklungsstränge eine Kurzschlussreaktanzen. Dabei sollten die Kurzschlussreaktanzen der beiden äußeren Stränge aus Gründen der Symmetrie identisch sein. Für den mittleren Wicklungsstrang ergeben sich bei Dreischenkelnkernen andere Streufelder, da dieser Strang vollständig innerhalb des Eisenkerns liegt. Außerdem weicht der Eisenweg von dem der äußeren Wicklungsstränge ab. Aus diesen Gründen differiert die Kurzschlussreaktanzen des mittleren Stranges geringfügig von denen der äußeren Stränge. Bei Fünfschenkelnkernen müssten dann alle drei Kurzschlussreaktanzen wieder annähernd identisch sein. Der Vergleich der numerisch ermittelten Werte mit realen Messwerten in Abschnitt 3.3 zeigt, wie gut diese Überlegungen erfüllt werden.

Mit den Gleichungen (3.10) und (3.17) kann sowohl die Streuinduktivität als auch der induktive Anteil der relativen Kurzschluss-Spannung bestimmt werden. Ähnlich wie die Kurzschlussreaktanzen ermittelt man die Nullinduktivität eines Drehstromtransformators aus seiner Impedanzform (3.42). Im nächsten Abschnitt wird die dazu nötige Spannungseinprägung diskutiert.

### 3.2.2 Nullinduktivitätsbestimmung

Neben der Streuinduktivität ist die Nullinduktivität von Transformatoren eine weitere Kenngröße, die aus der Impedanzform (3.42) eines dreiphasigen Zweiwicklungstransformators bestimmt werden kann. Dabei ist jedoch zu beachten, dass es sich hierbei zunächst um eine rein formale Berechnung handelt. Die Relevanz der so bestimmten Ergebnisse muss anhand der realen Nullinduktivitäten noch überprüft werden, weil die Felder sich bei Nullströmen in Dreischenkeltransformatoren nicht mehr vollständig im Eisenkern schließen, sondern aus dem Eisen austreten und sich über die Luft schließen. Schematisch ist der Feldverlauf in der Abbildung 3.7 dargestellt. In diesem Fall bleiben die Felder nicht auf die Kernebene beschränkt und das zweidimensionale Modell verliert seine Gültigkeit. Im Gegensatz dazu können sich die Felder in Transformatoren mit Fünfschenkelnkernen innerhalb des Eisenkerns schließen. Deren zweidimensionales Modell ist daher wieder aussagefähig.

Problematisch ist in jedem Fall die Nachbildung eines Kessels. In diesem bildet sich ein Differenzfeld aus, da sich die Felder des Kerns nicht bereits dort schließen. Dieser Differenzfluss erzeugt einen Induktionsstrom, der in den Kesselwänden ringförmig um die aktiven Teile des Transformators fließt. Im zweidimensionalen Modell können die Kesselwände nur links und rechts neben den äußeren Wicklungssträngen dargestellt werden, so dass die Nachbildung

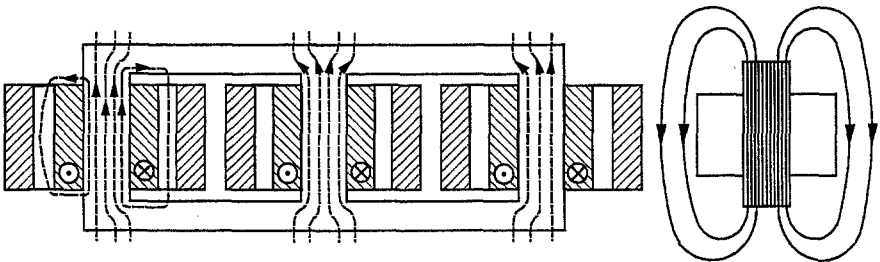


Bild 3.7: Qualitatives Feldbild eines Dreischenkeltransformators der Schaltgruppe Yyn bei Speisung mit einem Nullsystem nach [13].

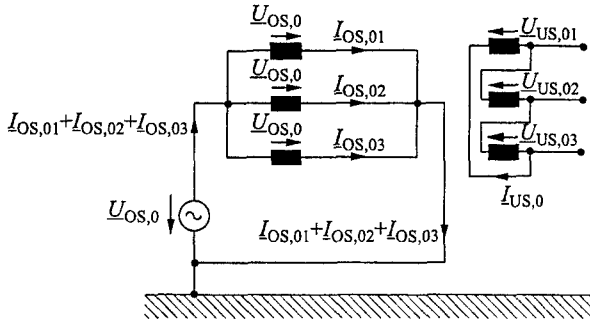


Bild 3.8: Speisung eines Transformators der Schaltgruppe YNd mit einer Nullspannung.

des Induktionsstroms und seines Feldes sehr eingeschränkt ist. Zu beachten ist dabei, dass der mittlere Wicklungsstrang im verwendeten Modell fast vollständig vom Kessel entkoppelt ist.

Analog zur Nachbildung des dreiphasigen Kurzschlussversuchs kommt es auch hier auf die Einspeisung der Spannungen an. Da die später diskutierten Beispieltransformatoren die Schaltgruppe YNd aufweisen, wird die Berechnung zunächst für diese Schaltgruppe durchgeführt.

In der Abbildung 3.8 ist ein Transformator in Stern-Dreieck-Schaltung mit herausgeführtem überspannungsseitigem Sternpunkt dargestellt. Im Falle der Speisung mit einer Nullspannung liegt an den überspannungsseitigen Klemmen jeweils die gleiche Spannung  $\underline{U}_{OS,0}$  an. In jeder Wicklung fließt ein Strom  $\underline{I}_{OS,i}$  mit  $1 \leq i \leq 3$ , so dass im Sternpunkt der Strom  $\underline{I}_{OS,01} + \underline{I}_{OS,02} + \underline{I}_{OS,03}$  fließen muss. Die Unterspannungsseite ist im Leerlauf geschaltet. Durch die geschlossene Masche der Dreieckschaltung kann sich dort ein Nullstrom  $\underline{I}_{US,0}$  ausbilden, der alle drei Unterspannungswicklungen gleichmäßig durchfließt. Es gilt daher

$$\underline{I}_{US,0} = \underline{I}_{US,01} = \underline{I}_{US,02} = \underline{I}_{US,03}. \quad (3.48)$$

Für den dazugehörigen Spannungsumlauf entlang des unterspannungsseitigen Dreiecks ergibt sich

$$\underline{U}_{US,01} + \underline{U}_{US,02} + \underline{U}_{US,03} = 0. \quad (3.49)$$

Zusammen mit den sechs Gleichungen der Impedanzform (3.42) sowie den Beziehungen (3.48) und (3.49) ergeben sich neun Gleichungen. Sie ermöglichen es, mit den überspannungsseitig eingeprägten Nullspannungen die jeweils drei Ströme ober- und unterspannungsseitig sowie die Spannungen an den drei Unterspannungswicklungen zu bestimmen. Dabei nimmt das neundimensionale Gleichungssystem die Gestalt



$$\begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_{14} & \underline{Z}_{15} & \underline{Z}_{16} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_{24} & \underline{Z}_{25} & \underline{Z}_{26} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} & \underline{Z}_{34} & \underline{Z}_{35} & \underline{Z}_{36} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{Z}_{41} & \underline{Z}_{42} & \underline{Z}_{43} & \underline{Z}_{44} & \underline{Z}_{45} & \underline{Z}_{46} & -1 & 0 & 0 \\ \underline{Z}_{51} & \underline{Z}_{52} & \underline{Z}_{53} & \underline{Z}_{54} & \underline{Z}_{55} & \underline{Z}_{56} & 0 & -1 & 0 \\ \underline{Z}_{61} & \underline{Z}_{62} & \underline{Z}_{63} & \underline{Z}_{64} & \underline{Z}_{65} & \underline{Z}_{66} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_{OS,01} \\ \underline{I}_{OS,02} \\ \underline{I}_{OS,03} \\ \underline{I}_{US,01} \\ \underline{I}_{US,02} \\ \underline{I}_{US,03} \\ \underline{U}_{US,01} \\ \underline{U}_{US,02} \\ \underline{U}_{US,03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_{OS,0} \\ \underline{U}_{OS,0} \\ \underline{U}_{OS,0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

an. Wenn mit  $\tilde{\underline{Y}}$  die Inverse der Systemmatrix des Gleichungssystems (3.50) bezeichnet wird, ergeben sich die gesuchten Nullströme und -spannungen aus der Multiplikation von  $\tilde{\underline{Y}}$  mit dem inhomogenen Vektor des Gleichungssystems (3.50). Da nur die ersten drei Zeilen dieses Vektors belegt sind, werden auch hier nicht alle Elemente der Matrix  $\tilde{\underline{Y}}$  zur Bestimmung der Lösung benötigt. Wie schon bei der Kurzschlussreaktanz gehen aber alle Elemente der Systemmatrix in die Bildung der Inversen ein. Mit  $i = 1, 2, 3$  ergeben sich

$$\underline{I}_{OS,0i} = (\tilde{\underline{Y}}_{i,1} + \tilde{\underline{Y}}_{i,2} + \tilde{\underline{Y}}_{i,3}) \cdot \underline{U}_{OS,0} \quad (3.51)$$

$$\underline{I}_{US,0i} = (\tilde{\underline{Y}}_{3+i,1} + \tilde{\underline{Y}}_{3+i,2} + \tilde{\underline{Y}}_{3+i,3}) \cdot \underline{U}_{OS,0} \quad (3.52)$$

sowie

$$\underline{U}_{US,0i} = (\tilde{\underline{Y}}_{6+i,1} + \tilde{\underline{Y}}_{6+i,2} + \tilde{\underline{Y}}_{6+i,3}) \cdot \underline{U}_{OS,0} \quad (3.53)$$

als Lösung. Bezeichnet man anschließend mit

$$\underline{I}_{OS,0} = \frac{1}{3} (\underline{I}_{OS,01} + \underline{I}_{OS,02} + \underline{I}_{OS,03}) \quad (3.54)$$

den Mittelwert der in den Oberspannungswicklungen fließenden Nullströme, so erhält man für die Nullimpedanz des Transformators die bekannte Beziehung

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_{OS,0}}{\underline{I}_{OS,0}} \quad (3.55)$$

Da auch diese Impedanz einen vernachlässigbaren ohmschen Anteil aufweist, wird gewöhnlich nur die Nullreaktanz  $X_0$  verwendet. Üblicherweise bezieht man die Nullreaktanz auf die Kurzschlussreaktanz und gibt das Verhältnis  $X_0/X_k$  an.

Für die Bestimmung der Nullinduktivitäten von Transformatoren der Schaltgruppe YNy ist die bisherige Rechnung nur geringfügig zu ändern. So können sich bei einer sternförmig geschalteten Unterspannungswicklung im Leerlauf dort keine Ströme ausbilden. Mithin gilt

$$\underline{I}_{US,01} = \underline{I}_{US,02} = \underline{I}_{US,03} = 0. \quad (3.56)$$

### 3.3 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 110-kV-/10-kV-Transformators

Unter diesen Bedingungen kann die Gleichung (3.48) beibehalten werden. Ersetzt man die Gleichung (3.49) durch

$$\underline{I}_{US,01} = 0, \quad (3.57)$$

so ergibt sich im Gleichungssystem (3.50) nur eine Änderung in der letzten Zeile der Systemmatrix. Diese Zeile wird im Falle eines YNy-Transformators identisch Null bis auf eine Eins in der vierten Spalte, die dem Strom  $\underline{I}_{US,01}$  zugeordnet ist. Dann kann die weitere Rechnung wie oben beschrieben durchgeführt werden.

Am Beispiel eines realen 110-kV-/10-kV-Transformators sollen nun die Streuinduktivität und Kurzschlussverluste sowie bei dreiphasigen Modellen auch die Nullinduktivität nummerisch bestimmt werden.

### 3.3 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 110-kV-/10-kV-Transformators

Anhand realer Transformatoren, deren Streuinduktivitäten als Messwerte vorliegen, wird gezeigt, dass man mit der Randelementmethode die Streuinduktivität von Leistungstransformatoren ohne jegliche Erfahrungsfaktoren mit einer ähnlichen Genauigkeit wie bei einer Messung bestimmen kann.

Als erstes wird ein dreischenkliges 110-kV-/10-kV-Transformator mit 40 MVA Bemessungsleistung untersucht. Er weist die Schaltgruppe YNd5 sowie einen Stufenschalter mit einem Regelbereich von etwa  $\pm 15\%$  auf. Die Oberspannungswicklung besteht aus einer Stammwicklung mit rund 55 Scheiben und die Grob- und Feinstufenwicklungen des Stufenschalters aus ca. 160 bzw. 140 Windungen. Die Stammwicklung enthält zwei parallele Windungsstränge mit je 770 Windungen. Dagegen verfügt die Unterspannungswicklung über zwei parallele Stränge aus je ungefähr 150 Windungen in 3 Lagen. Diese Windungen sind als Drill-Leiter ausgeführt, die jeweils mehr als 20 Teileiter aufweisen.

Zu modellieren sind damit ungefähr 7850 Windungen. Wie bereits im Abschnitt 2.3 abgeschätzt ist, ergeben sich bei vollständigen Modellierungen eines solchen Transformators lineare Gleichungssysteme von mehreren Hunderttausend Gleichungen. Für die praktische Anwendung des hier vorgestellten Verfahrens ist es wichtig, wie genau der Transformator tatsächlich nachgebildet werden muss, um zuverlässig Streuinduktivitäten berechnen zu können. Im Folgenden werden deshalb Modelle mit unterschiedlicher Detailgenauigkeit untersucht.

#### 3.3.1 Modellierungsstufen des 110-kV-/10-kV-Transformators

Um in den folgenden Abschnitten die Ergebnisse der Berechnungen mit der Randelementmethode übersichtlich in Tabellen darstellen zu können, werden hier zunächst die sieben verwendeten Modelle des untersuchten 110-kV-/10-kV-Transformators beschrieben. Dabei werden zum einen die physikalischen Parameter, zum anderen die Geometrie der Modelle erläutert.

Aus den Materialkonstanten der Leiter lassen sich die physikalischen Eigenschaften der Modelle direkt bestimmen. Für die Windungen aus Kupfer werden Leiter mit einer elektrischen

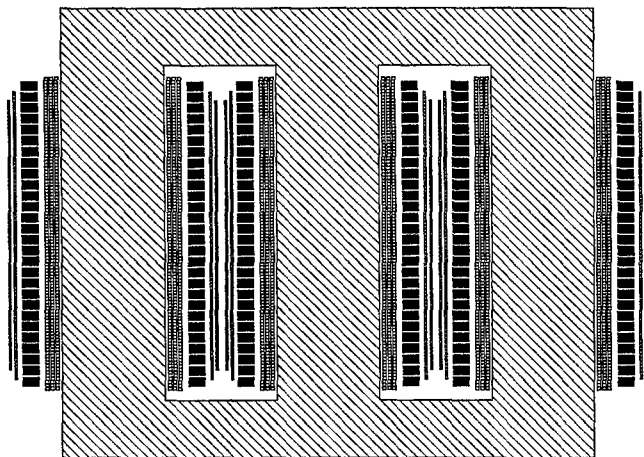


Bild 3.9: Das Modell 1 des 110-kV-/10-kV-Transformators.

Leitfähigkeit von  $\sigma = 5,6 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  und einer relativen magnetischen Permeabilität von  $\mu_r = 1$  gewählt, während der Eisenkern mit  $\mu_r = 5000$  nachgebildet wird. Bei der elektrischen Leitfähigkeit des Eisenkerns muss man jedoch von der tatsächlichen abweichen. Die Transformatorenkerne sind geblecht, um Wirbelströme zu reduzieren. Diese Blechung kann in dem verwendeten Modell nicht erfasst werden. Durch die Wahl einer niedrigen elektrischen Leitfähigkeit von  $\sigma = 1 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  werden die Wirbelströme künstlich herabgesetzt; eine Leitfähigkeit von  $\sigma = 0$  führt jedoch auf eine Singularität. Wie die Ergebnisse zeigen, kann die Eisenleitfähigkeit in einem großen Bereich schwanken, ohne dass die Resultate wesentlich beeinflusst werden. Insofern ist diese Maßnahme unproblematisch. Alle Rechnungen werden bei einer Frequenz von 50 Hz durchgeführt.

Über die physikalischen Daten der Leiter hinaus ist zusätzlich die Geometrie der sieben Modelle zu erfassen. In dieser Hinsicht ist das Modell 1 das größte, während das Modell 7 fast alle Windungen des Transformators enthält. Dabei sind alle Modelle dreiphasig nachgebildet, genauso wie das in Abbildung 3.9 gezeigte Modell 1. Vom Modell 1 unterscheiden sich die feineren Darstellungen des Transformators nur durch die größere Anzahl an Leitern

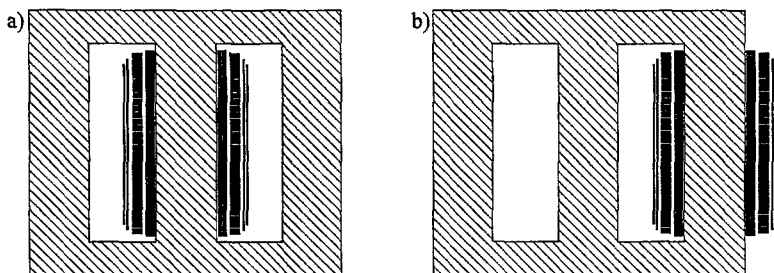


Bild 3.10: Einphasiges Modell 1 des 110-kV-/10-kV-Transformators a) mittlere, b) äußere Phase.

### 3.3 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 110-kV-/10-kV-Transformators

in den einzelnen Windungen. Außerdem sind in den Modellen 5 bis 7 die einzelnen Scheiben der Oberspannungswicklung nicht mehr alle identisch, sondern der Realität entsprechend in den oberen und unteren Scheiben mit breiteren und dafür nicht so hohen Leitern nachgebildet. Angesichts der Tatsache, dass diese Details selbst aus Übersichtsabbildungen nicht zu entnehmen wären, wird auf solche für die feineren Modelle verzichtet. Der Tabelle 3.1 können die Windungszahlen der einzelnen Modelle entnommen werden.

Modell Nr.	Windungen Feinstufenwicklung	Windungen Grobstufenwicklung	Windungen Oberspannung	Windungen Unterspannung	Summe der Windungen
1	72	80	392	294	838
2	144	160	770	294	1368
3	144	160	1540	294	2138
4	144	160	1540	1176	3020
5	144	160	1522	2352	4178
6	144	160	1522	4704	6530
7	144	160	1522	5880	7706

Tabelle 3.1: Modellierte Windungen in den verschiedenen Modellen des 110-kV-/10-kV-Transformators.

Wie bereits angesprochen, lässt die große Zahl der nachzubildenden Leiter keine vollständige Modellierung des untersuchten 110-kV-/10-kV-Transformators mit allen drei Phasen auf den derzeit zur Verfügung stehenden Rechnern zu. Dieses wird vermutlich in wenigen Jahren der Fall sein; doch bis dahin muss die Anzahl der Gleichungen reduziert werden. Wenn man nur die mittlere Phase nachbildet, verringert sich die Anzahl der Leiter um den Faktor drei. Durch die dann vorhandene Symmetrie wird nochmals der Faktor zwei eingespart. Da der benötigte Speicher ungefähr quadratisch mit der Zahl der Gleichung wächst, benötigt man für ein einphasiges Modell wie in Abbildung 3.10a nur rund 3 % des Speichers der vollständigen Modellierung. Man kann aber auch eine der beiden äußeren Phasen alleine berechnen (vgl. Abbildung 3.10b). Hier ist keine Symmetrie vorhanden, also reduziert sich der Speicherbedarf nur auf rund 11 %.

Mit den zugänglichen Rechnerressourcen sind diese beiden Arten einphasiger Modelle für alle sieben Modellierungsstufen berechnet worden. Inwieweit die dabei bestimmten Streuinduktivitäten im Vergleich mit dreiphasig ermittelten Werten noch aussagekräftig sind, zeigt der folgende Vergleich.

#### 3.3.2 Einphasig ermittelte Streuinduktivitäten

Im vorangegangenen Abschnitt sind sieben Modelle vorgestellt worden, die den hier untersuchten 110-kV-/10-kV-Transformator zunehmend genauer nachbilden. Mit diesen Modellen sind zunächst einphasige Berechnungen der Streuinduktivität durchgeführt worden. Tabelle 3.2 zeigt den Bedarf an Rechenzeit und Speicherplatz.

Den hier dargestellten Rechnungen liegen einheitliche Randlelement-Verteilungen zu Grunde. Jeder Leiter ist mit einem Randlelement pro Seite dargestellt worden, während die Ränder des Eisenkerns pro Seite in zehn Randlelemente eingeteilt worden sind. Auf diese Weise sind alle Rechnungen in diesem Abschnitt direkt vergleichbar. Im nächsten Abschnitt wird

Modell-Nr.	Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
1	6824	HP-V2250	10 min	249 MB
2	11064	HP-L2000	15 min	663 MB
3	17224	HP-V2250	142 min	1618 MB
4	24280	HP-V2250	395 min	3225 MB
5	33752	HP-V2250	1028 min	6422 MB
6	52568	HP-V2250	2750 min	16142 MB
7	61976	HP-N4000	5045 min	22049 MB

Tabelle 3.2: Laufzeiten und Speicherbedarf der einphasigen Modelle des 110-kV-/10-kV-Transformators bei Nachbildung der mittleren Phase.

zwischen Rechnungen mit mehr modellierten Leitern aus wenigen Randelementen und solchen mit weniger Leitern aus mehr Randelementen verglichen. Mit den verwendeten zehn Randelementen macht man zwar bei den berechneten Elementen der Induktivitätsmatrix möglicherweise einen geringen Fehler von wenigen Prozent, die Streuinduktivitäten oder später auch die Verluste ändern sich bei feinerer Diskretisierung des Eisenkerns jedoch nicht mehr.

Für den untersuchten 110-kV-/10-kV-Transformator liegen Messungen der relativen Kurzschluss-Spannungen für insgesamt drei Stellungen des Stufenschalters vor. Neben der Mittenstellung sind dies die beiden Extremstellungen mit maximaler bzw. minimaler Windungszahl. Für diese drei Fälle sind jeweils die Streuinduktivitäten mit der Randelementmethode numerisch bestimmt worden. Dabei muss jedoch nur eine Feldberechnung durchgeführt werden, denn die unterschiedlichen Stellungen des Stufenschalters lassen sich durch ein entsprechendes Auswerten und Zusammenfassen der Induktivitätsmatrix (3.22) auf der Ebene der Leiterpaare bzw. Windungen simulieren. Die in der nachfolgenden Tabelle 3.3 aufgeführten Ergebnisse ließen sich folglich durch jeweils eine Rechnung mit den obigen Systemanforderungen bestimmen.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	14,98 %	16,40 %	13,82 %
2	14,57 %	16,04 %	13,34 %
3	14,66 %	16,13 %	13,46 %
4	15,31 %	16,83 %	14,11 %
5	16,01 %	17,49 %	14,79 %
6	16,00 %	17,49 %	14,78 %
7	16,00 %	17,48 %	14,76 %
Messwert	15,87 %	17,53 %	14,59 %

Tabelle 3.3: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen für die mittlere Phase des 110-kV-/10-kV-Transformators bei alleiniger Modellierung dieser Phase.

Bemerkenswert ist der Sprung in der Qualität der Ergebnisse zwischen dem dritten und dem vierten Modell. Die beiden Modelle unterscheiden sich im Wesentlichen in der Darstellung der Unterspannungswicklung. Das vierte Modell enthält erstmals Drill-Leiter. Zwar sind die Windungen nur in vier Teilleiter eingeteilt; Wirbelströme in diesen Leitern werden jedoch

schon wesentlich realitätsnäher berücksichtigt. Mit einem weiteren Schritt der Verfeinerung - nun acht Teilleiter in den Unterspannungswindungen - ist praktisch die Konvergenz bei den Ergebnissen erreicht.

Heute können die Modelle 4 und 5 durchaus auf Workstations gerechnet werden, die weit unterhalb der Leistungsklasse der Großrechner liegen. Die Speicheranforderungen lassen sich größtenteils durch günstigen Festplattenspeicher befriedigen; nur die erhöhte Rechenzeit muss in Kauf genommen werden.

Die geringe relative Abweichung der numerisch ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen von den Messwerten zeigt, wie gut die Randelementmethode für diese Berechnungen geeignet ist. Für die Mittenstellung des Stufenschalters liegt der Messwert um 0,8 % unter dem Ergebnis der Randelementmethode, wenn man das detaillierteste Modell zu Grunde legt. Die beiden anderen Stufenschalterstellungen weisen berechnete Kurzschluss-Spannungen auf, die um 0,3 % unter bzw. um 1,1 % über den Messwerten liegen.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass in die Ergebnisse keinerlei Erfahrungsfaktoren eingehen. Außerdem ist nur die mittlere Phase nachgebildet worden, so dass die Einflüsse der beiden äußeren nicht berücksichtigt werden können. Diese Einschränkung ist ebenfalls in der Feldberechnung nach [1] gemacht worden. Wesentlichen Einfluss auf die Qualität der Ergebnisse hat die oben diskutierte energiegewichtete Windungslänge  $l_{eg}$ , die statt einer rein geometrisch gemittelten Länge verwendet wird. Wie theoretisch erwartet, ist diese Art der Mittelung im Wesentlichen unabhängig von der Detailtreue des Modells. Durch die Tabelle 3.4 wird dieses bestätigt. Die Schwankungen der in die Streuinduktivitätsberechnung eingehenden Längen  $l_{eg}$  liegt bei unter 0,5 % für die sieben betrachteten Modelle. Zum Vergleich dazu weisen die Unterspannungswicklung in ihrem geometrischen Mittelpunkt einen Umfang von etwa 2,10 m und die Oberspannungswicklung von etwa 2,84 m auf.

Modell-Nr.	Energiegewichtete Windungslänge $l_{eg}$
1	2,51232 m
2	2,50993 m
3	2,50996 m
4	2,50128 m
5	2,50424 m
6	2,50706 m
7	2,50764 m

Tabelle 3.4: Energiegewichtete Länge, bei verschiedenen Modellen des 110-kV-/10-kV-Transformators ermittelt.

Nachdem die bisherigen Ergebnisse gezeigt haben, dass es prinzipiell möglich ist, die Streuinduktivitäten von Leistungstransformatoren mit der Randelementmethode zu bestimmen, soll die Berechnung nun möglichst noch genauer gestaltet werden. Als erstes wird dazu die zweite mögliche einphasige Modellierung gemäß Abbildung 3.10b untersucht. Dabei wird allein eine Phase auf dem äußeren Schenkel nachgebildet.

In diesem Fall kann keine Symmetrie mehr ausgenutzt werden, so dass sich die Anzahl der Gleichungen gegenüber den einphasigen Modellen mit der mittleren Phase um den Faktor zwei erhöht. Als Konsequenz daraus steigen die benötigten Systemressourcen stark an, wie

die folgende Tabelle 3.5 zeigt.

Modell-Nr.	Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
1	6824	HP-V2250	30 min	744 MB
2	11064	HP-V2250	114 min	1955 MB
3	17224	HP-V2250	798 min	2821 MB
4	24280	HP-V2250	2076 min	10301 MB
5	33752	NEC SX-4	1346 min	20146 MB
6	52568	HP-N4000	10121 min	46560 MB

Tabelle 3.5: Laufzeiten und Speicherbedarf der einphasigen Modelle des 110-kV-/10-kV-Transformators bei Nachbildung der äußeren Phase.

Bei der Berechnung der relativen Kurzschluss-Spannung allein für eine äußere Phase ergeben sich prinzipiell geringere Werte für  $u_k$  als bei der mittleren Phase. In der Tabelle 3.6 liegen die Ergebnisse durchschnittlich etwa 1,8 % unterhalb der oben für die mittlere Phase angegebenen Kurzschluss-Spannungen.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	14,73 %	16,08 %	13,62 %
2	14,32 %	15,72 %	13,15 %
3	14,40 %	15,81 %	13,28 %
4	15,36 %	16,78 %	14,20 %
5	15,69 %	17,10 %	14,56 %
6	15,59 %	17,00 %	14,42 %
Messwert	15,87 %	17,53 %	14,59 %

Tabelle 3.6: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen für die äußere Phase des 110-kV-/10-kV-Transformators bei alleiniger Modellierung dieser Phase.

Physikalisch lassen sich die kleineren relativen Kurzschluss-Spannungen der äußeren Wicklungsstränge einerseits auf die stark verringerte Hauptinduktivität zurückführen. Bei einem Transformator mit einem Dreischenkelkern ohne Berücksichtigung von Stoßfugen in den Blechen schließen sich die Feldlinien einer äußeren Wicklung über einen viel längeren Eisenweg. Dadurch reduzieren sich die magnetischen Leitwerte der Wicklung und mit ihnen die Hauptinduktivität auf etwa 25 % des Wertes der mittleren Wicklungen, wie die Berechnungen ergeben haben. Eine so merklich verringerte Hauptinduktivität wirkt sich, wie aus dem einphasigen T-Ersatzschaltbild des Transformators in Abbildung 3.1 ersichtlich, dann auch auf die Kurzschluss-Spannung aus, weil die Gesamtimpedanz im Kurzschlussfall reduziert ist. Andererseits weisen die äußeren Wicklungsstränge, die teilweise außerhalb des Eisenkerns liegen, auch ein anderes Streufeld als der in der Mitte liegende Strang auf. Bei dreiphasigen Modellen fallen diese Asymmetrien jedoch deutlich geringer aus, wie die Berechnungen später zeigen werden.

Bisher sind die relativen Kurzschluss-Spannungen für die mittlere und die beiden äußeren Phasen getrennt berechnet worden. Üblicherweise gibt man auch bei dreiphasigen Transformatoren nur eine Kurzschluss-Spannung an. Gemäß DIN VDE 0532 Teil 101 [16] wird die Mittelung nicht präzise vorgeschrieben. Wenn man also jede Phase mit dem gleichen

### 3.3 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 110-kV-/10-kV-Transformators

Gewicht in den Mittelwert eingehen lässt, so muss die relative Kurzschluss-Spannung der äußeren Phase zweifach gewichtet werden. Die Ergebnisse einer solchen Mittelung sind in Tabelle 3.7 dargestellt.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	14,81 %	16,19 %	13,69 %
2	14,40 %	15,83 %	13,21 %
3	14,49 %	15,92 %	13,34 %
4	15,34 %	16,80 %	14,17 %
5	15,80 %	17,23 %	14,64 %
6	15,73 %	17,16 %	14,53 %
Messwert	15,87 %	17,53 %	14,59 %

Tabelle 3.7: Mittelwert der aus den einphasigen Modellierungen bestimmten relativen Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen des 110-kV-/10-kV-Transformators.

Insgesamt weichen die gemittelten relativen Kurzschluss-Spannungen geringfügig stärker von den Messwerten ab, als es bei der einphasigen Berechnung der mittleren Phase allein der Fall ist. Sie liegen mit einer Differenz von 0,9 % für die Mittenstellung des Stufenschalters, 2,2 % für die Maximalstellung und 0,4 % für die Minimalstellung jedoch nicht wesentlich unterhalb der Messwerte. Beachtet man noch die Tatsache, dass auch die Messung der Kurzschluss-Spannung den in [17] beschriebenen Schwierigkeiten unterliegt und damit fehlerbehaftet ist, so erscheint das Maß der Übereinstimmung als sehr befriedigend.

#### 3.3.3 Konvergenzverhalten einphasig ermittelter Streuinduktivitäten

Im vorangegangenen Abschnitt sind die einphasig berechneten Streuinduktivitäten eines 110-kV-/10-kV-Transformators erläutert worden. Alle dort betrachteten Modelle waren mit nur einem Randelement pro Seite für die Leiter und zehn Randelementen pro Seite beim Eisenkern ausgestattet. Nun sollen Modelle bei geringerer Leiterzahl mit mehreren Randelementen je Seite berechnet werden. Gesucht ist die Antwort auf die Frage, ob man bei einer gegebenen Anzahl an Randelementen – bestimmt z.B. durch feststehende Systemressourcen – besser eine größere Anzahl von Leitern nachbildet oder mehr Randelemente bei einem größeren Modell eingesetzt werden.

Als Vergleichsmaßstab wird die relative Kurzschluss-Spannung für die Mittenstellung des Stufenschalters herangezogen, die sich aus einphasigen Nachbildungen der mittleren Phase ergibt. Dafür bestimmte Werte sind der Tabelle 3.3 des vorigen Abschnittes zu entnehmen. Der erste Vergleich wird mit dem Modell 1 durchgeführt, dessen Randelementezahl sukzessive bis auf den Faktor zehn erhöht worden ist. Damit liegt die Anzahl der verwendeten Randelemente sogar über der von Modell 7. Wie in der Tabelle 3.8 zu sehen, stellt sich im untersuchten Bereich zwar eine Konvergenz des Ergebnisses ein, jedoch bleibt eine recht große Abweichung von 3,5 % bezogen auf den Messwert erhalten.

Damit kann festgehalten werden, dass man mit zu groben Modellen trotz größerer Randelementezahl je Seite die Genauigkeit von feineren Modellen mit vergleichbarer Randelementezahl nicht erzielen kann. Allerdings können Modelle, die eine gewisse Detailtreue aufweisen, durchaus die Ergebnisse der feinsten Modelle erreichen. In der nachfolgenden Tabelle 3.9 sind



Randelemente	$u_k$
6824	14,98 %
13648	15,12 %
20472	15,21 %
27296	15,25 %
34120	15,29 %
40944	15,30 %
47768	15,32 %
54592	15,33 %
61496	15,33 %
68240	15,34 %

Tabelle 3.8: Konvergenzverhalten der relativen Kurzschluss-Spannung bei Erhöhung der Randelementezahl am Beispiel des Modells 1 des 110-kV-/10-kV-Transformators.

die berechneten relativen Kurzschluss-Spannungen für das Modell 4 bei Verwendung von bis zu der dreifachen Anzahl Randelemente dargestellt. Die so bestimmten Werte für  $u_k$  liegen zum Teil sogar dichter an den Messwerten als die mit den Modellen 5 bis 7 bestimmten.

Randelemente	$u_k$
24280	15,31 %
48560	15,62 %
72840	15,71 %

Tabelle 3.9: Konvergenzverhalten der relativen Kurzschluss-Spannung bei Erhöhung der Randelementezahl am Beispiel des Modells 4 des 110-kV-/10-kV-Transformators.

In Abbildung 3.11 sind die berechneten relativen Kurzschluss-Spannungen über der Anzahl der Randelemente noch einmal zusammenfassend dargestellt. Man erkennt die Konvergenz sowohl bei Verfeinerung der Modelle sowie bei Erhöhung der Randelementezahl. Jedoch wird ebenfalls deutlich, dass sich Modell 1 nicht zur Bestimmung präziser Streuinduktivitäten eignet. Eine Modellierung sollte mindestens so genau sein, dass alle Windungen nachgebildet und Drill-Leiter zumindest teilweise berücksichtigt werden. Ob man die Randelemente danach eher auf etwas weniger Leiter verteilt oder stattdessen mehr Leiter mit weniger Randelementen pro Seite verwendet, kann nicht abschließend entschieden werden. Festzuhalten bleibt die Tatsache, dass eine Erhöhung der Randelementezahl bei ansonsten gleicher Modellierung zu einer höheren berechneten Streuinduktivität führt. Die Tabellen 3.8 und 3.9 belegen dieses Verhalten. Es ist eine bei allen Streuinduktivitätsberechnungen mit der Randelementmethode beobachtete Erscheinung, dass sich die Ergebnisse von unten dem Grenzwert nähern. Aus den bisherigen Rechnungen können ebenfalls Aussagen über die Kurzschlussverluste gewonnen werden, die im Folgenden dargestellt sind.

### 3.3.4 Bestimmung der Kurzschlussverluste bei einphasigen Modellen

Aussagen über die Kurzschlussverluste erhält man, indem anstelle des Imaginärteils bei den Impedanzen der Realteil betrachtet wird. Aus dem so bestimmten Verlustanteil  $u_r$  der relativen Kurzschluss-Spannung lassen sich durch Gleichung (3.37) die Kurzschlussverluste

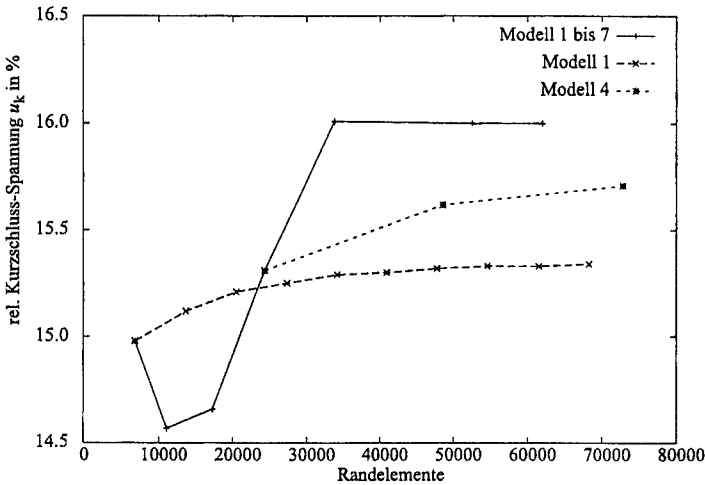


Bild 3.11: Berechnete relative Kurzschluss-Spannung  $u_k$  in Abhängigkeit von der Randlementezahl für die Modelle 1 bis 7 sowie für die Modelle 1 und 4 mit erhöhter Randlementezahl.

$P_k$  bestimmen. Für die in diesem Abschnitt betrachteten einphasigen Modelle ergeben sich die in Tabelle 3.10 dargestellten Verluste.

Modell-Nr.	$u_r$	$P_k$
1	1,71 %	682,7 kW
2	1,66 %	663,3 kW
3	1,15 %	461,5 kW
4	0,65 %	259,4 kW
5	0,52 %	206,6 kW
6	0,47 %	187,4 kW
7	0,47 %	178,8 kW
Messwert	0,40 %	158,4 kW

Tabelle 3.10: Mit der Randlementmethode bestimmte Kurzschlussverluste  $P_k$  des 110-kV-/10-kV-Transformators.

Auffällig sind hier die zum Teil extrem großen Verluste bei den Modellen 1 bis 3. Sie sind durch die grobe Darstellung vor allem der Unterspannungswicklung begründet. Dort entstehen in den viel zu groß nachgebildeten Leiter beträchtliche Wirbelströme, die diese Verluste verursachen. Zwischen den Modellen 3 und 4 kommt es – wie bei den Streuinduktivitäten – zu einem deutlichen Qualitätssprung in den Ergebnissen. Durch die immer genauer nachgebildeten Leiter der weiteren Modelle gehen die Wirbelstromverluste zurück, bis schließlich in der genauesten Darstellung die gemessenen Verluste bis auf gut 12 % reproduziert werden. An dieser Stelle sei auf die Problematik der Messung der Verluste (vgl. [17]) hingewiesen.

Im Vergleich zu den Ergebnissen der Streuinduktivitätsberechnung ist die relative Abweichung bei den hier bestimmten Kurzschlussverlusten überdurchschnittlich groß. Jedoch sind die absoluten Abweichungen zwischen den berechneten und gemessenen Werten für  $u_r$  ähn-

lich groß, wie dieses bei  $u_k$  der Fall ist. Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass hier die Genauigkeitsgrenze der verwendeten Rechner und Zahlendarstellung erreicht wird, zumal die später bei der Kraftberechnung diskutierten Genauigkeiten ebenfalls in dieser Größenordnung liegen. Für die Ungenauigkeiten bei der relativen Kurzschluss-Spannung  $u_k$  können die hier auftretenden Differenzen jedoch kaum verantwortlich gemacht werden. Der Einfluss von  $u_r$  ist wegen des quadratischen Zusammenhangs gemäß Gleichung (3.18) nur minimal, solange  $u_r \ll u_k$  gilt.

Die bisherigen Ergebnisse repräsentieren die gesamten Kurzschlussverluste. Daraus können die Zusatzverluste berechnet werden. Ausgehend von Gleichung (3.41) werden dafür die Gleichstromverluste benötigt. Bekanntlich sind diese aus den geometrischen Abmessungen sowie der elektrischen Leitfähigkeit der Windungen gemäß Gleichung (3.40) zu bestimmen. Eine Feldberechnung ist dafür nicht notwendig. Für den 110-kV-/10-kV-Transformator lassen sich die Gleichstromverluste so zu  $P_G = 132,7$  kW bestimmen. Dem steht ein Messwert von 130,7 kW gegenüber.

Abschließend können aus der Differenz der Kurzschlussverluste  $P_k$  und der Gleichstromverluste  $P_G$  die Zusatzverluste  $P_Z$  berechnet werden. Sie sind aus den Messwerten mit 27,7 kW bestimmt worden, während die Rechnungen 46,5 kW liefern. In diesem Fall resultiert die Abweichung im Wesentlichen aus den oben schon diskutierten Ungenauigkeiten bei den Kurzschlussverlusten. Der richtig berechnete Anteil der Gleichstromverluste ist darin nicht mehr enthalten, so dass die relative Abweichung hier besonders groß wird. Zu bedenken sind dabei außerdem diejenigen Verluste, die Kreisströme in parallelen Zweigen verursachen. Sie werden ebenfalls als Zusatzverluste gewertet. Solche Ströme können in diesem Modell nicht erfasst werden. Im Weiteren wird überprüft, ob eine dreiphasige Nachbildung die systematischen Fehler merklich verringert.

### 3.3.5 Dreiphasig ermittelte Streuinduktivitäten

Im Abschnitt 3.2.1 ist die Berechnungsmethode für die Untersuchung des dreiphasigen Kurzschlussversuchs beschrieben worden. Anzumerken bleibt, dass der Kernpunkt der einphasigen Streuinduktivitätsberechnung – die Verwendung der energiegewichteten Länge  $l_{eg}$  – auch hier in unveränderter Form beibehalten wird. Weiterhin werden die Größen Streuinduktivität, Kurzschlussreaktanz sowie relative Kurzschluss-Spannung synonym verwendet.

Verglichen mit einphasigen Rechnungen sind bei dreiphasigen ein Vielfaches der Systemressourcen notwendig. Aus der Tabelle 3.11 ist zu ersehen, dass nicht mehr alle Modelle mit den verfügbaren Ressourcen berechnet werden können. Vermutlich dürfte sich das schon in wenigen Jahren ändern.

Modell-Nr.	Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
1	20232	HP-V2250	602 min	7977 MB
2	32952	HP-V2250	2657 min	20864 MB
3	51432	HP-N4000	11379 min	50219 MB

Tabelle 3.11: Laufzeiten und Speicherbedarf verschiedener dreiphasiger Modelle des 110-kV-/10-kV-Transformators.

Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, sind auch hier alle Rechnungen mit je einem Randelement pro Seite durchgeführt worden. Auf den längeren Rändern des

3.3 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 110-kV-/10-kV-Transformators

Eisenkerns waren es wiederum jeweils zehn Randlelemente. Im Gegensatz zu den einphasigen Modellen sind hier die Möglichkeiten, die Randlelementezahl zu erhöhen, angesichts der großen Anzahl an Leitern kaum vorhanden.

Bei dreiphasigen Rechnungen müssen die bestimmten relativen Kurzschluss-Spannungen aller drei Phasen zusammengefasst werden. Analog zu den einphasigen Rechnungen mittelt man auch hier die relativen Kurzschluss-Spannungen arithmetisch. Da die Unterschiede zwischen den drei Phasen verhältnismäßig gering sind, ist diese Mittelung unproblematisch. Im Detail sind die Ergebnisse der Tabelle 3.12 zu entnehmen.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung			$u_k$ bei maximaler Übersetzung			$u_k$ bei minimaler Übersetzung		
	Mitte	Links	Rechts	Mitte	Links	Rechts	Mitte	Links	Rechts
1	14,93 %	14,84 %	14,84 %	16,31 %	16,24 %	16,24 %	13,87 %	13,75 %	13,75 %
	Mittelwert: 14,87 %			Mittelwert: 16,27 %			Mittelwert: 13,79 %		
2	14,44 %	14,42 %	14,42 %	15,88 %	15,88 %	15,88 %	13,24 %	13,22 %	13,22 %
	Mittelwert: 14,43 %			Mittelwert: 15,88 %			Mittelwert: 13,23 %		
3	14,52 %	14,50 %	14,50 %	15,97 %	15,96 %	15,96 %	13,37 %	13,33 %	13,33 %
	Mittelwert: 14,51 %			Mittelwert: 15,97 %			Mittelwert: 13,37 %		
Messwert	15,87 %			17,53 %			14,59 %		

Tabelle 3.12: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen des 110-kV-/10-kV-Transformators bei dreiphasiger Modellierung.

Da nur die ersten drei Modelle zu untersuchen sind, ergeben sich größere Abweichungen zu den Messwerten. Dabei ist jedoch zu beachten, dass sich auch bei den einphasigen Rechnungen erst mit den Modellen 4 und 5 die Ergebnisse deutlich verbessert haben. Wie der Vergleich zwischen den einphasigen und dreiphasigen Rechnungen der Modelle 1 bis 3 in der Tabelle 3.13 zeigt, stimmen die berechneten relativen Kurzschluss-Spannungen bei allen Modellen und Stufenschalterstellungen mit einer Abweichung von deutlich unter 1 % überein.

Modell-Nr.	Abweichung bei Stufenschalter in Mittenstellung	Abweichung bei maximaler Übersetzung	Abweichung bei minimaler Übersetzung
1	0,41 %	0,49 %	0,73 %
2	0,21 %	0,32 %	0,15 %
3	0,14 %	0,31 %	0,00 %

Tabelle 3.13: Relative Abweichungen der dreiphasig berechneten relativen Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen des 110-kV-/10-kV-Transformators von den einphasig ermittelten.

Abschließend bleibt festzuhalten, dass auf den verfügbaren Rechnern zur Zeit keine detaillierten dreiphasigen Modelle zu bearbeiten sind. Jedoch lassen sich diese von den berechenbaren einphasigen Nachbildungen gut annähern. Anschließend wird auf die Nullinduktivitäten von Transformatoren eingegangen.

### 3.3.6 Ermittlung der Nullinduktivitäten

Neben den Streuinduktivitäten kann man aus der Induktivitätsmatrix (3.42) gemäß Gleichung (3.55) auch die Nullinduktivitäten bestimmen. Im Gegensatz zu den Streuinduktivitäten können jedoch keine detaillierten einphasigen Modelle verwendet werden. Stattdessen ist eine dreiphasige Rechnung erforderlich. Als erstes werden die ermittelten Nullinduktivitäten des dreischenkigen 110-kV-/10-kV-Transformators diskutiert.

In der Praxis ist es üblich, das Verhältnis der Null- zu der Kurzschlussimpedanz des Mitsystems anzugeben. Für die beiden Schaltgruppen YNd und YNy sind die für die ersten drei Modellierungsstufen des 110-kV-/10-kV-Transformators bestimmten Werte in der Tabelle 3.14 angegeben.

Modell-Nr.	$X_0/X_k$ (YNd)	$X_0/X_k$ (YNy)
1	0,62	3,75
2	0,62	3,77
3	0,62	3,72

Tabelle 3.14: Numerisch ermitteltes Verhältnis von Nullreaktanzen zu Kurzschlussreaktanzen für die Schaltgruppen YNd und YNy am Beispiel des dreischenkigen 110-kV-/10-kV-Transformators.

Zunächst fällt besonders die Konstanz des Verhältnisses  $X_0/X_k$  auf. Die geringen Schwankungen resultieren daraus, dass sich die Kurzschlussimpedanz von Modell zu Modell in gleichem Maße wie die Nullimpedanz ändert. Daher ist zu vermuten, dass auch bei den bisher nicht berechenbaren Modellen das Verhältnis  $X_0/X_k$  erhalten bleibt. Bevor jedoch nicht das Modell 4 überprüft worden ist, das bezüglich der Streuinduktivitäten gegenüber Modell 3 eine deutliche Verbesserung in der Genauigkeit darstellt, kann hier keine abschließende Aussage getroffen werden.

Für Transformatoren mit Kessel erwartet man nach [13] ein  $X_0/X_k$  von etwa 1, wenn die Schaltgruppe YNd vorliegt, bzw. einen Wert von ungefähr 10...14 bei der Schaltgruppe YNy. Die berechneten Ergebnisse liegen in beiden Fällen jedoch erheblich niedriger. Hauptursache ist die im Abschnitt 3.2.2 beschriebene Dreidimensionalität der Nullfelder. Aufgrund der fehlenden Phasenverschiebung schließen sich die Felder über die Luft (vgl. auch Abbildung 3.7 auf Seite 47). Damit entfällt die feldführende Wirkung des Eisenkerns in der Modellebene. Der Einfluss eines Kessels ist nur minimal, da dieser im zweidimensionalen Modell nur unzureichend erfasst wird (vgl. Abschnitt 3.2.2). Somit können die mit der zweidimensionalen Randelementmethode bestimmten Nullinduktivitäten nur als orientierende Werte betrachtet werden. Genauere Aussagen lassen sich erst dann treffen, wenn zum Vergleich Messwerte herangezogen werden.

Wie ebenfalls im Abschnitt 3.2.2 beschrieben, führen die zusätzlichen Schenkel eines Fünfschenkelkerns dazu, dass sich die Felder über diese Schenkel schließen können. Damit sollte das zweidimensionale Modell bei diesen Ausführungen wieder besser gerechtfertigt sein. Um diese Frage zu klären, ist das zweite Modell des 110-kV-/10-kV-Transformators um zwei zusätzliche Schenkel erweitert worden. Für diesen nun fünfschenkigen Transformator hat sich für eine angenommene Schaltgruppe YNd ein Verhältnis  $X_0/X_k = 0,79$  ergeben. Zu erwarten wäre wie auch beim Dreischenkelkern ein Wert von etwa 1. Damit liegt das Ergebnis deutlich näher am Richtwert als der Wert von  $X_0/X_k = 0,62$  der dreischenkigen Kernbauart. Bei der Schaltgruppe YNy liegen die typischen Werte gemäß [13] etwa bei

$X_0/X_k = 10 \dots 100$ . Hier hat die Rechnung  $X_0/X_k = 1878$  ergeben. Der zu hohe Wert dürfte darauf zurückzuführen sein, dass die Stoßfugen bei der Kernmodellierung unberücksichtigt geblieben sind.

Ohne einen Vergleich mit Messwerten kann keine abschließende Aussage über die Qualität der berechneten Nullinduktivitäten getroffen werden. Bevor auf einen weiteren Transformator eingegangen wird, soll zunächst ein systematischer Fehler, das Ausnutzen von Symmetrien, näher untersucht werden.

#### 3.3.7 Fehler durch Ausnutzung der Symmetrie

Wie bei der Beschreibung der Symmetrien im Abschnitt 2.3.1 erläutert worden ist, besteht bei Querschnitten durch reale Transformatoren keine exakte Symmetrie. Eine ideal gewickelte Spule weist zwischen dem Hin- und dem Rückleiter einen Versatz von einer halben Windungshöhe auf. Modelliert werden jedoch zumeist exakt symmetrische Modelle, um die Anzahl der zu lösenden Gleichungen niedrig zu halten. Schematisch sind diese beiden Geometrien in der Abbildung 3.12 gezeigt.

In den untersuchten Transformatoren sind die verwendeten Leiter jedoch nur einen knappen Zentimeter hoch. Es ist somit zu erwarten, dass der dadurch entstandene Fehler zu vernachlässigen ist. Eine Untersuchung der Einflüsse der Symmetrie hat diese Vermutung bestätigt. Es sind mehrere kleine Modelle des 110-kV-/10-kV-Transformators mit Verschiebungen der Hin- und Rückleiter gegeneinander um die Hälfte der Windungshöhe durchgerechnet worden. Dabei kann man die Hin- oder Rückleiter entweder alleine oder andererseits beide Windungsteile in jeweils unterschiedliche Richtungen verschieben. Im ersten Fall kann die Verschiebung nach unten oder oben durchgeführt werden, während im zweiten Fall die Auswahl bleibt, ob der linke oder rechte Teil nach oben verlagert werden soll. Schließlich kann man diese Auswahl bei jeder Wicklung unabhängig treffen. Aus der Vielzahl der Möglichkeiten ergibt sich, dass diese nicht alle bei Modellen überprüft werden können, die an die Grenzbelastung der zur Verfügung stehenden Rechner heranreichen.

Als Ergebnis ergibt sich, dass in keinem Fall die Abweichung zwischen den Streuinduktivitäten oder Verlusten des symmetrischen Modells einerseits und des realistischeren Modells andererseits über 0,1 % angewachsen ist. Ein systematischer Fehler in dieser Größe ist zu vernachlässigen, weil die Streuinduktivitäten im gleichen Bereich variieren, wenn man die Wicklungen um wenige Millimeter verschiebt. Mit solchen Toleranzen ist ohnehin zu rechnen, weil die exakten Positionen der Leiter nicht bekannt sind. Man kann zwar aus den

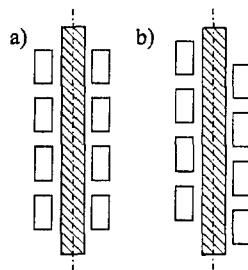


Bild 3.12: a) Modellierte Windungen (symmetrisch), b) reale Windungen (asymmetrisch).

äußeren Abmessungen einer Wicklung – einschließlich Isolation und der verwendeten Leitergröße – eine realistische gleichmäßige Verteilung der Leiter abschätzen, die genauen Positionen unterliegen aber auch Fertigungstoleranzen. Weiterhin sind die Differenzen in den berechneten Streuinduktivitäten und Verlusten für unterschiedlich detaillierte Modelle deutlich größer als 0,1 %. Insgesamt bleibt festzuhalten, dass die Annahme einer symmetrischen Wicklungsanordnung zu keinem nennenswerten systematischen Fehler führt.

### 3.4 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 110-kV-/20-kV-Transformators

Als zweites Beispiel wird ein 110-kV-/20-kV-Transformator ähnlicher Bauart wie der zuvor untersuchte 110-kV-/10-kV-Transformator betrachtet. Auch dieser Transformator verfügt über einen Stufenschalter mit knapp 13 % Regelbereich sowie die Schaltgruppe YNd5. Mit einer Bemessungsleistung von 31,5 MVA ist er jedoch etwas kleiner dimensioniert. Der wesentliche Unterschied gegenüber dem ersten Beispiel besteht darin, dass die parallelen Stränge in Unter- und Oberspannungswicklung fehlen. Mit ca. 740 Windungen in der Stammwicklung sowie etwa 120 in der Grob- und 110 in der Feinstufenwicklung des Stufenschalters besitzt dieser Transformator überspannungsseitig ähnlich viele Windungen wie der zuvor untersuchte 110-kV-/10-kV-Transformator. Aufgrund der doppelt so hohen Bemessungsspannung unterspannungsseitig muss hier mit fast 290 Windungen in vier Lagen auch etwa die doppelte Anzahl berücksichtigt werden. Jedoch sind die Drill-Leiter der Unterspannungswicklung mit nur knapp 15 Teileitern ausgeführt, so dass insgesamt rund 5320 Windungen nachgebildet werden müssen. Da die Windungszahl des 110-kV-/10-kV-Transformators deutlich unterschritten wird, ist es möglich, ein detaillierteres dreiphasiges Modell dieses Transformators zu betrachten.

#### 3.4.1 Modellierungsstufen des 110-kV-/20-kV-Transformators

Aufgrund der geringeren Windungszahl des 110-kV-/20-kV-Transformators kann auf relativ grobe Modelle verzichtet werden. Die in der Tabelle 3.15 beschriebenen drei Modelle sind trotz ihrer Genauigkeit immer noch klein im Vergleich zu denen des 110-kV-/10-kV-Transformators.

Modell Nr.	Windungen Feinstufenwicklung	Windungen Grobstufenwicklung	Windungen Oberspannung	Windungen Unterspannung	Summe der Windungen
1	108	120	743	288	1259
2	108	120	743	1728	2699
3	108	120	743	3456	4427

Tabelle 3.15: Zahl modellierter Windungen in den drei verschiedenen Modellen des 110-kV-/20-kV-Transformators.

Das zunächst verwendete Modell 1 entspricht in seiner Detailtreue etwa dem Modell 3 des 110-kV-/10-kV-Transformators, Modell 2 wiederum dem Modell 5. Schließlich sind auch die beiden detailgetreuesten Modelle vergleichbar. Bezüglich der physikalischen Eigenschaften gilt das im Abschnitt 3.3.1 Gesagte.

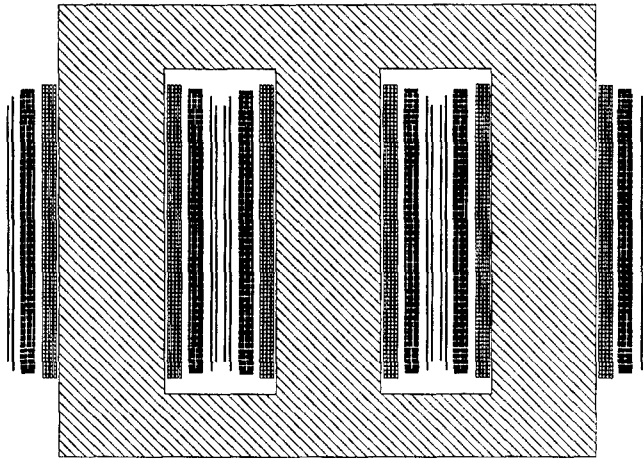


Bild 3.13: Modell 1 des 110-kV-/20-kV-Transformators.

In der Abbildung 3.13 erkennt man im Modell 1 des 110-kV-/20-kV-Transformators die Leiter der Unterspannungswicklung. Einzelne Leiter der Oberspannungswicklung können nicht mehr aufgelöst werden. Sichtbar ist jedoch noch die unterschiedliche Struktur der Scheiben dieser Wicklung. Insgesamt gibt es sechs Bereiche: Zunächst die oberste Scheibe, dann zwei Blöcke aus je drei Scheiben; nach dem Hauptteil der Wicklung folgen unten noch einmal vier identische Scheiben, bevor die unterste Scheibe die Wicklung vervollständigt. In jedem dieser Bereiche sind die verwendeten Leiter gleich groß; sie unterscheiden sich jedoch von Bereich zu Bereich. Zu den Rändern der Spule hin werden die Leiter breiter und sind dafür etwas weniger hoch.

Wie auch schon beim ersten Beispieltransformator werden zunächst die einphasigen Modelle diskutiert, wobei wiederum sowohl die mittlere als auch eine äußere Phase betrachtet werden. Anschließend werden die so bestimmten Streuinduktivitäten wiederum mit denen der dreiphasigen Modelle verglichen.

#### 3.4.2 Einphasig ermittelte Streuinduktivitäten

Anhand der Modelle 1 bis 3 des 110-kV-/20-kV-Transformators sind mit der schon vom vorangegangenen Transformator her bekannten Randlelementeverteilung einphasige Berechnungen der Streuinduktivität durchgeführt worden. Mit 3' und 3'' sind Varianten des Modells 3 gekennzeichnet, die mit der doppelten bzw. dreifachen Randlelementezahl berechnet worden sind. Wie die Tabelle 3.16 zeigt, ließ die geringe Leiterzahl bei diesem Transformator eine solche Erhöhung der Randlelementezahl – zumindest bei den einphasigen Modellen der mittleren Phase – zu.

Im Gegensatz zu den Rechnungen für den 110-kV-/10-kV-Transformator werden schon mit dem größten Modell die Messwerte recht gut getroffen. Der Grund dafür ist wiederum die höhere Genauigkeit der Modelle. In der Tabelle 3.17 sind die Ergebnisse dargestellt. Hier liegen die berechneten relativen Kurzschluss-Spannungen bei allen drei Stufenschalterstel-



Modell-Nr.	Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
1	10192	HP-L2000	18 min	561 MB
2	21712	HP-V2250	275 min	2576 MB
3	35536	HP-V2250	1183 min	7936 MB
3'	71072	NEC SX-4	435 min	23155 MB
3''	106608	NEC SX-4	1915 min	49377 MB

Tabelle 3.16: Laufzeiten und Speicherbedarf der drei einphasigen Modelle des 110-kV-/20-kV-Transformators zur Bestimmung der relativen Kurzschluss-Spannung der mittleren Phase.

lungen um etwa 3,5 % über den Messwerten, wenn man das genaueste Modell betrachtet. Obwohl die Ergebnisse des größten Modells damit dichter an den Messwerten liegen, sollte dieser Tatsache nicht zu viel Bedeutung beigemessen werden, da die Messwerte auch Messfehler aufweisen.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	12,61 %	13,48 %	11,89 %
2	12,90 %	13,79 %	12,18 %
3	12,92 %	13,80 %	12,19 %
3'	12,96 %	13,85 %	12,23 %
3''	12,98 %	13,87 %	12,27 %
Messwert	12,52 %	13,41 %	11,83 %

Tabelle 3.17: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen des 110-kV-/20-kV-Transformators bei einphasiger Modellierung der mittleren Phase.

Für die Berechnung des äußeren Wicklungsstrangs kamen die Modelle 3' und 3'' nicht mehr in Betracht, aber mit dem Modell 3 konnte die fast vollständige Nachbildung der Wicklungen untersucht werden. Einen Überblick über die benötigten Rechnerressourcen für diese Rechnungen gibt die folgende Tabelle 3.18.

Modell-Nr.	Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
1	10192	HP-V2250	91 min	1681 MB
2	21712	HP-V2250	845 min	8253 MB
3	35536	NEC SX-4	422 min	19713 MB

Tabelle 3.18: Laufzeiten und Speicherbedarf der drei einphasigen Modelle des 110-kV-/20-kV-Transformators zur Bestimmung der relativen Kurzschluss-Spannung der äußeren Phase.

Wie schon beim 110-kV-/10-kV-Transformator liegen die für die äußere Phase bestimmten relativen Kurzschluss-Spannungen erneut um etwa 2 % niedriger als die der mittleren Phase. Als Ursache dafür ist – wie oben diskutiert – die reduzierte Hauptinduktivität durch den verlängerten Eisenweg anzusehen. Dass die Reduktion mit 2 % sowohl beim 110-kV-/20-kV-Transformator wie auch beim zuvor betrachteten 110-kV-/10-kV-Transformator etwa gleich groß ist, liegt vor allem an den fast identischen Abmessungen beider Transformatoren. Im Detail gibt die Tabelle 3.19 die Ergebnisse wieder.

### 3.4 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 110-kV-/20-kV-Transformators

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	12,41 %	13,24 %	11,75 %
2	12,67 %	13,50 %	11,99 %
3	12,70 %	13,54 %	12,02 %
Messwert	12,52 %	13,41 %	11,83 %

Tabelle 3.19: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen des 110-kV-/20-kV-Transformators bei einphasiger Modellierung der äußere Phase.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	12,48 %	13,32 %	11,80 %
2	12,75 %	13,60 %	12,05 %
3	12,77 %	13,63 %	12,07 %
Messwert	12,52 %	13,41 %	11,83 %

Tabelle 3.20: Mittelwert der aus den einphasigen Modellierungen bestimmten relativen Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen des 110-kV-/20-kV-Transformators

Erneut werden die verschiedenen einphasigen Rechnungen gemittelt. Diese Ergebnisse sind in der Tabelle 3.20 dargestellt. Nach der Mittelung ergeben sich relative Kurzschluss-Spannungen für die drei Stufenschalterstellungen, die zwischen 1,6 % bei der maximalen Übersetzung und 2,0 % bei den anderen beiden Stufenschalterstellungen oberhalb der Messwerte liegen. Beachtet man die bei den Ergebnissen des 110-kV-/10-kV-Transformator diskutierten Fehlerquellen, bestätigt sich die Randlelementmethode zur Berechnung von Streuinduktivitäten wiederum.

#### 3.4.3 Bestimmung der Kurzschlussverluste

Während beim 110-kV-/10-kV-Transformator die Bestimmung der Kurzschlussverluste  $P_k$  einem um gut 12 % zu großen Wert liefert, ergibt sich beim 110-kV-/20-kV-Transformator ein um 7 % zu kleiner Wert, wie die Tabelle 3.21 zeigt.

Modell-Nr.	$u_r$	$P_k$
1	0,75 %	236,9 kW
2	0,35 %	110,3 kW
3	0,38 %	118,8 kW
Messwert	0,41 %	127,9 kW

Tabelle 3.21: Mit der Randlelementmethode bestimmte Kurzschlussverluste  $P_k$  des 110-kV-/20-kV-Transformators.

Dieses Ergebnis ist in zweierlei Hinsicht beachtenswert: Erstens können aufgrund der Tatsache, dass hier das berechnete  $P_k$  zu klein ausfällt, zu starke Wirbelströme als Fehlerquelle ausgeschlossen werden. Andererseits ist die relative Abweichung auch hier groß genug, dass die zur Zeit mögliche Genauigkeit zumindest bei den Verlusten nicht ausreichend zu sein scheint.

Aus der Differenz der Kurzschlussverluste  $P_k$  und der Gleichstromverluste  $P_G$  ergeben sich nach Gleichung (3.41) die Zusatzverluste  $P_Z$ . Vom Hersteller sind Gleichstromverluste von 98,7 kW gemessen worden, während die Berechnung aufgrund der Windungsgeometrie den um rund 2 % größeren Wert  $P_G = 100,2$  kW liefert. Auch hier weichen die berechneten Zusatzverluste mit  $P_Z = 18,6$  kW erheblich von den 29,2 kW ab, die vom Hersteller bestimmt worden sind. Der große relative Unterschied zwischen berechnetem und gemessenem Wert ist – wie schon beim vorangegangenen Beispiel – darin begründet, dass die Zusatzverluste  $P_Z$  deutlich kleiner sind als die Kurzschlussverluste  $P_k$ , während der absolute Fehler etwa gleich groß ist.

Schließlich soll noch ein dreiphasiges Modell des 110-kV-/20-kV-Transformators untersucht werden, um an ihm die Gültigkeit der einphasigen Rechnungen erneut zu bestätigen.

### 3.4.4 Dreiphasig ermittelte Streuinduktivitäten

Auch beim 110-kV-/20-kV-Transformator ließen sich keine vollständigen dreiphasigen Modellrechnungen durchführen. Da im Gegensatz zum 110-kV-/10-kV-Transformator jedoch keine ganz groben Nachbildungen untersucht worden sind, blieb nur ein einziges derzeit berechenbares Modell übrig. Wie schon am Anfang dieses Abschnitts festgestellt, entspricht dieses Modell 1 etwa dem Modell 3 des 110-kV-/10-kV-Transformators, so dass insgesamt vergleichbare Modellierungsstufen erreicht werden. Die Tabelle 3.22 zeigt die für das Modell 1 benötigten Hardware-Ressourcen.

Modell-Nr.	Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
1	30336	HP-V2250	1665 min	14768 MB

Tabelle 3.22: Laufzeiten und Speicherbedarf des dreiphasigen Modells des 110-kV-/20-kV-Transformators zur Bestimmung der relativen Kurzschluss-Spannung.

Aufgrund der Tatsache, dass nur das Modell 1 untersucht werden konnte, weichen die Ergebnisse aus Tabelle 3.23 von den Messwerten nur maximal 0,2 % ab. Dieses Gesamtergebnis wird jedoch dadurch relativiert, dass man davon ausgehen muss, dass genauere Rechnungen – wie auch schon im Fall der einphasigen Modellierungen – zu höheren Werten führen werden, die sich dann stärker von den Messwerten unterscheiden.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung			$u_k$ bei maximaler Übersetzung			$u_k$ bei minimaler Übersetzung		
	Mitte	Links	Rechts	Mitte	Links	Rechts	Mitte	Links	Rechts
1	12,49 %	12,57 %	12,57 %	13,35 %	13,45 %	13,45 %	11,80 %	11,85 %	11,85 %
	Mittelwert: 12,54 %			Mittelwert: 13,42 %			Mittelwert: 11,84 %		
Messwert	12,52 %			13,41 %			11,83 %		

Tabelle 3.23: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen des 110-kV-/20-kV-Transformators bei dreiphasiger Modellierung.

Wichtig in diesem Zusammenhang sind vor allem die Unterschiede zwischen den gemittelten einphasigen Kurzschluss-Spannungen und den Ergebnissen der betrachteten dreiphasigen Rechnung. Wie schon beim zuvor untersuchten Transformator liegen die Abweichungen

### 3.5 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines 63-MVA-Doppelstock-Transformators

gemäß Tabelle 3.24 bei deutlich unter einem Prozent. Auch dieses Beispiel bestätigt den Aussagewert einphasiger Rechnungen.

Modell-Nr.	Abweichung bei Stufen- schalter in Mittenstellung	Abweichung bei maxi- maler Übersetzung	Abweichung bei mini- maler Übersetzung
1	0,48 %	0,75 %	0,34 %

Tabelle 3.24: Relative Abweichung der dreiphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannung von den einphasig ermittelten für den 110-kV-/20-kV-Transformator.

Im folgenden Abschnitt wird ein Doppelstock-Transformator untersucht, der zum einem aufgrund seiner großen Windungszahl und zum anderen aufgrund seiner abweichenden Geometrie problematisch ist.

### 3.5 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 63-MVA-Doppelstock-Transformators

Bezüglich seines Aufbaus unterscheidet sich ein Doppelstock-Transformator von den bisher untersuchten Transformatoren: Er besteht aus zwei Stockwerken, die jeweils eigene Unter- und Oberspannungswicklungen enthalten. Während die Oberspannungswicklungen beider Stockwerke parallel geschaltet sind, besteht zwischen den Unterspannungswicklungen keine leitende Verbindung. Die Einteilung in zwei Stockwerke kann der Abbildung 3.14 entnommen werden.

Bei einer Spannung von 110 kV überspannungsseitig bzw. jeweils 10 kV unterspannungsseitig beträgt die Bemessungsleistung 63 MVA, wenn beide Stockwerke im Betrieb sind; die Schaltgruppe des Doppelstock-Transformators ist YNd5d5. Mit einem Stufenschalter kann die Windungszahl von ca. 670 überspannungsseitig um etwa 12 % erhöht oder reduziert werden. In jedem Stockwerk besteht die Oberspannungswicklung aus zwei parallelen Strängen,

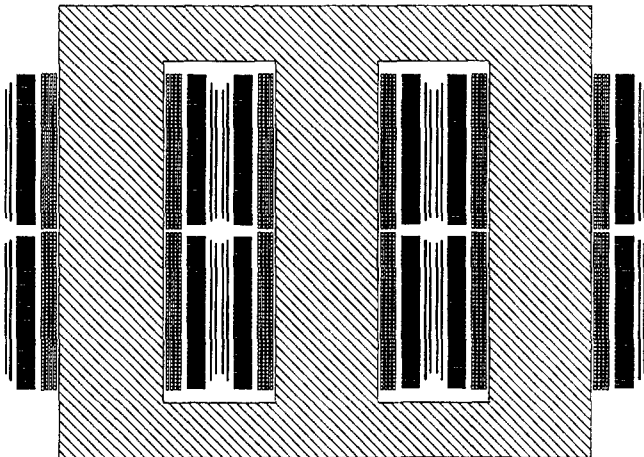


Bild 3.14: Untersuchter 63-MVA-Doppelstock-Transformator.

die ungefähr 580 Windungen in 35 Scheiben enthalten. Zusätzlich kommen rund 90 Windungen aus der Grob- und 80 aus der Feinstufenwicklung hinzu. Im Gegensatz dazu verfügt die Unterspannungswicklung zwar auch je Stockwerk über zwei parallele Stränge, jedoch bestehen diese aus etwa 110 Drill-Leitern in vier Lagen. Jeder Drill-Leiter enthält wiederum knapp 20 Teileiter.

Nicht nur die Gesamtzahl der zu modellierenden Windungen ist mit 11460 erheblich größer als bei den anderen beiden Transformatoren; es sind auch verschiedene Kurzschlussversuche möglich: Beide Stockwerke können gleichzeitig betrieben werden; dann sind auch die Unterspannungswicklungen beider Stockwerke parallel geschaltet. Im Folgenden wird der zugehörige Kurzschlussversuch mit der Ziffer 1 gekennzeichnet. Als zweite Möglichkeit bietet es sich an, nur eine der beiden Unterspannungswicklungen zu verwenden. Dabei ist es aufgrund der baulichen Symmetrie unerheblich, ob die obere oder untere gewählt wird. Diese beiden identischen Varianten stellen die Kurzschlussversuche 2 und 3 dar. Schließlich ist noch der Einzelbetrieb der beiden Unterspannungswicklungen zu betrachten. Beim Kurzschlussversuch 4 wird von dieser Konfiguration ausgegangen. In der Oberspannungswicklung können – bedingt durch die parallelen Stockwerke – dann Kreisströme induziert werden. Dieser Fall ist besonders wegen seiner außergewöhnlichen Geometrie interessant. Hier befindet sich der Streukanal in der Schenkelmittle. Daher wird das Streufeld von Querfeldern geprägt, die durch den Eisenkern kaum geführt werden, und infolgedessen ist das zweidimensionale Modell weniger aussagekräftig. Eine quantitative Bewertung erfolgt im anschließenden Abschnitt.

### 3.5.1 Modellierungsstufen des Doppelstock-Transformators

Auch bei dem 63-MVA-Doppelstock-Transformator sind unterschiedliche Modellierungen untersucht worden, die in Tabelle 3.25 aufgeführt sind. Während das Modell 1 noch recht grob ist, sind im Modell 2 alle Windungen bis auf einige aus der Oberspannungswicklung nachgebildet; Drill-Leiter sind jedoch noch nicht berücksichtigt. Ab dem dritten Modell ist dann die Oberspannungswicklung vollständig erfasst, und die Anzahl der nachgebildeten Teileiter in der Unterspannungswicklung steigt von 4 über 8 auf schließlich 16 in der feinsten betrachteten Darstellung, dem Modell 5. Auch hier beginnt die Diskussion der Ergebnisse mit der Darstellung der einphasig bestimmten relativen Kurzschluss-Spannungen.

Modell Nr.	Windungen Feinstufenwicklung	Windungen Grobstufenwicklung	Windungen Oberspannung	Windungen Unterspannung	Summe der Windungen
1	4	4	1120	320	1448
2	81	90	2240	432	2843
3	81	90	2308	1728	4207
4	81	90	2308	3456	5935
5	81	90	2308	6912	9391

Tabelle 3.25: Zahl modellierter Windungen in den verschiedenen Modellen des Doppelstock-Transformators.

#### 3.5.2 Einphasig ermittelte Streuinduktivitäten

Für den 63-MVA-Doppelstock-Transformator ist es ebenfalls wichtig, über einphasige Modellierungen die Streuinduktivitäten bestimmen zu können. Bedingt dadurch, dass die Anzahl an nachzubildenden Leitern besonders groß ist, können nur verhältnismäßig grobe dreiphasige Modelle betrachtet werden. Es zeigt sich an den benötigten Rechnerressourcen gemäß Tabelle 3.26, dass sich bei den hier gewählten Modellierungsstufen wiederum Modelle ergeben, die den Einsatz einer Workstation ermöglichen.

Modell-Nr.	Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
1	11608	HP-V2250	48 min	742 MB
2	22768	HP-V2250	317 min	2859 MB
3	33680	HP-V2250	1009 min	6680 MB
4	47504	HP-V2250	2819 min	13378 MB
5	75152	HP-N4000	5127 min	32463 MB

Tabelle 3.26: Laufzeiten und Speicherbedarf der einphasigen Modelle des 63-MVA-Doppelstock-Transformators zur Bestimmung der relativen Kurzschluss-Spannung der mittleren Phase.

Abweichend von den bisher untersuchten Transformatoren werden aufgrund der insgesamt vier verschiedenen Kurzschlussversuche deren Ergebnisse getrennt diskutiert. Dabei werden die Kurzschlussversuche 2 und 3 zusammengefasst, die wegen der baulichen Symmetrie der beiden Stockwerke identische Ergebnisse liefern.

Zunächst sollen die berechneten relativen Kurzschluss-Spannungen für den Kurzschlussversuch 1 betrachtet werden. In diesem Fall werden beide Stockwerke parallel betrieben, so dass der Doppelstock-Transformator fast wie ein herkömmlicher Transformator aufgefasst werden kann. Nur durch die bauliche Trennung der Spulen in eine untere und obere Hälfte unterscheidet er sich von den bisher untersuchten Transformatoren. Maximal 5,1 % differieren die Ergebnisse in der Tabelle 3.27 von den Messwerten.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	14,97 %	16,07 %	14,04 %
2	14,66 %	15,84 %	13,64 %
3	15,38 %	16,57 %	14,34 %
4	15,75 %	16,95 %	14,71 %
5	15,88 %	17,04 %	14,86 %
Messwert	15,11 %	16,21 %	14,18 %

Tabelle 3.27: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen beim Kurzschlussversuch 1 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators bei einphasiger Modellierung der mittleren Phase.

Vergleicht man die Ergebnisse des Kurzschlussversuchs 1 mit denen der Kurzschlussversuche 2 und 3 aus Tabelle 3.28, so zeigt sich, dass bei letzteren die relativen Abweichungen zu den Messwerten merklich größer sind. Bis zu 6,7 % beträgt hier die Differenz. Als Ursache für diese Abnahme in der Genauigkeit muss die Lage der betriebenen Windungen bei den Kurzschlussversuchen 2 und 3 gesehen werden. In diesem Fall wird nur ein Stockwerk vom Strom

durchflossen. Da die beiden Stockwerke der Oberspannungswicklung parallelgeschaltet werden, fließt auch im nicht betriebenen Stockwerk der Oberspannungswicklung ein geringer Strom; das zweite Stockwerk der Unterspannungswicklung bleibt jedoch stromlos. In der Abbildung 3.15 ist die Schaltung für den Betrieb eines Stockwerks schematisch dargestellt.

Bisher endeten die Spulen immer in der Nähe des Jochs, so dass die Felder im Wesentlichen innerhalb der Eisenkerns bzw. parallel dazu verlaufen können. In diesem Fall enden die stromdurchflossenen Spulen aber etwa auf halber Höhe des Schenkels. Dort fehlt die direkte Führung der Felder durch das Joch. Die Felder krümmen sich also verstärkt in Richtung der Schenkel, allerdings nicht nur in der Modellebene, sondern dreidimensional. Da dieses nur an einer Seite der Spulen auftritt, ist die Dreidimensionalität nicht besonders ausgeprägt. Daher halten sich die Fehler noch in Grenzen.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	13,81 %	14,46 %	13,21 %
2	13,58 %	14,27 %	12,93 %
3	14,38 %	15,09 %	13,72 %
4	14,70 %	15,41 %	14,03 %
5	14,62 %	15,32 %	14,00 %
Messwert	13,80 %	14,37 %	13,39 %

Tabelle 3.28: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen bei den Kurzschlussversuchen 2 und 3 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators bei einphasiger Modellierung der mittleren Phase.

Beim Kurzschlussversuch 4 verstärkt sich der Effekt jedoch merklich, wie die Tabelle 3.29 zeigt. Um fast 33 % sind die berechneten Werte zu groß. Auch hier ist der Grund für die große Abweichung vom Messwert in der Dreidimensionalität der Felder zu suchen. In diesem Fall sind nur die beiden Unterspannungswicklungen in Betrieb, während die Oberspannungswicklung bedingt durch ihre parallel geschalteten Stockwerke als zusätzliche Kurzschlusswicklung wirkt. Als Streufelder kommen nun vor allem Querfelder zwischen den beiden Unterspannungswicklungen in der Fenstermitte in Frage. Diese werden – wie auch schon bei den Kurzschlussversuchen 2 und 3 – nur geringfügig von Schenkel und Joch in die Kernebene geführt. Es entsteht ein ausgeprägt dreidimensionales Feldbild, welches die zweidimensionale Randelementmethode nur unvollständig wiedergeben kann.

Zur Verbesserung der Ergebnisse sind auch hier die Streuinduktivitäten der äußeren Phase – so detailliert wie möglich – bestimmt worden. Dabei ist, wie auf Seite 55 ausgeführt, mit geringeren Streuinduktivitäten für die äußeren Phasen zu rechnen. Zunächst ist in der Tabelle

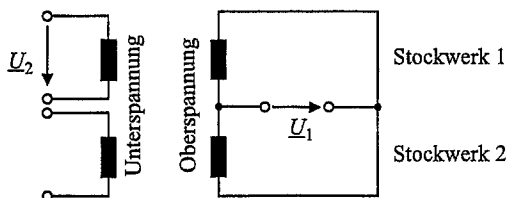


Bild 3.15: Schaltung beim Betrieb eines Stockwerks beim 63-MVA-Doppelstock-Transformator.

Modell-Nr.	$u_k$
1	30,32 %
2	31,07 %
3	32,75 %
4	33,30 %
5	33,11 %
Messwert	25,06 %

Tabelle 3.29: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen für den Kurzschlussversuch 4 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators bei einphasiger Modellierung der mittleren Phase.

3.30 jedoch die benötigte Rechnerleistung für die durchgeführten Rechnungen angegeben.

Modell-Nr.	Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
1	11608	HP-V2250	222 min	2148 MB
2	22768	HP-V2250	956 min	9040 MB
3	33680	NEC-SX4	2649 min	17918 MB
4	47504	HP-N4000	6908 min	40107 MB

Tabelle 3.30: Laufzeiten und Speicherbedarf der einphasigen Modelle des 63-MVA-Doppelstock-Transformators zur Bestimmung der relativen Kurzschluss-Spannung einer äußeren Phase.

Diese Rechnungen haben die theoretischen Erwartungen für den Kurzschlussversuch 1 bestätigt: Um etwa 1 % liegen die für eine äußere Phase berechneten relativen Kurzschluss-Spannungen niedriger als die der mittleren Phase. Insgesamt sind die Resultate aus Tabelle 3.31 rund 3,5 % größer als die Messwerte.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	14,82 %	15,90 %	13,92 %
2	14,51 %	15,65 %	13,53 %
3	15,27 %	16,34 %	14,21 %
4	15,64 %	16,79 %	14,64 %
Messwert	15,11 %	16,21 %	14,18 %

Tabelle 3.31: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen beim Kurzschlussversuch 1 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators bei einphasiger Modellierung der äußeren Phase.

Wie die Tabelle 3.32 zeigt, trifft dieses auch für die Kurzschlussversuche 2 und 3 zu. Die relativen Kurzschluss-Spannungen liegen ebenfalls rund 1 % niedriger als bei der mittleren Phase. Damit bleiben auch diese Werte merklich zu hoch.

Anders als bei den ersten drei Kurzschlussversuchen fallen beim vierten Kurzschlussversuch die berechneten relativen Kurzschluss-Spannungen deutlich geringer aus. Zwischen 3 % und 4 % geringere Werte ergeben sich für die Phase auf einem äußeren Schenkel. Trotzdem liegen die Ergebnisse aus der Tabelle 3.33 noch immer mehr als 20 % über den Messwerten.

Abschließend werden die einphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen der mittleren und äußeren Phase arithmetisch im Verhältnis 1:2 gemittelt. In der Tabelle 3.34 sind



Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	13,67 %	14,31 %	13,09 %
2	13,45 %	14,12 %	12,83 %
3	14,23 %	14,92 %	13,59 %
4	14,49 %	15,18 %	13,85 %
Messwert	13,80 %	14,37 %	13,39 %

Tabelle 3.32: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen beiden Kurzschlussversuchen 2 und 3 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators bei einphasiger Modellierung der äußeren Phase.

Modell-Nr.	$u_k$
1	29,44 %
2	30,03 %
3	31,63 %
4	32,12 %
Messwert	25,06 %

Tabelle 3.33: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen für den Kurzschlussversuch 4 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators bei einphasiger Modellierung der äußeren Phase.

diese Mittelwerte im Fall des Kurzschluss-Versuchs 1 angegeben. Für die genaueste berechenbare Modellierung weichen sie um 3 % bis 4 % von den Messwerten ab. Damit sind die Ergebnisse ungenauer als bei den bisher untersuchten Transformatoren.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	14,87 %	15,96 %	13,96 %
2	14,56 %	15,71 %	13,57 %
3	15,31 %	16,54 %	14,38 %
4	15,68 %	16,84 %	14,66 %
Messwert	15,11 %	16,21 %	14,18 %

Tabelle 3.34: Mittelwert der aus den einphasigen Modellierungen bestimmten relativen Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen des Kurzschlussversuches 1 beim 63-MVA-Doppelstock-Transformator.

Für die Kurzschluss-Versuche 2 und 3 sind die gemittelten relativen Kurzschluss-Spannungen in der Tabelle 3.35 dargestellt. Mit Abweichungen zwischen 3,8 % und 6,2 % von den Messwerten für die verschiedenen Stufenschalterstellungen bei dem berechneten Modell 4 sind die Ergebnisse jedoch immer noch brauchbar, vor allem wenn man bedenkt, dass hier nur ein Stockwerk betrieben worden ist. Eine solche Konfiguration ist mit der Methode von Rogowski nach [1] nicht in dieser Genauigkeit zu berechnen.

Abschließend wird auf die Ergebnisse des Kurzschlussversuchs 4 in Tabelle 3.36 eingegangen. Mit ca. 30 % Abweichung von den Messwerten muss man festhalten, dass dieser Kurzschlussversuch von zwei auf einem Schenkel übereinander angeordneten Spulen mit der zweidimensionalen Randlelementmethode nur sehr unzureichend berechenbar ist. Als Ur-

### 3.5 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines 63-MVA-Doppelstock-Transformators

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung	$u_k$ bei maximaler Übersetzung	$u_k$ bei minimaler Übersetzung
1	13,72 %	14,36 %	13,13 %
2	13,49 %	14,17 %	12,86 %
3	14,38 %	14,98 %	13,03 %
4	14,56 %	15,26 %	13,91 %
Messwert	13,80 %	14,37 %	13,39 %

Tabelle 3.35: Mittelwert der aus den einphasigen Modellierungen bestimmten relativen Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen der Kurzschlussversuche 2 und 3 beim 63-MVA-Doppelstock-Transformator.

sache kommt vor allem – wie oben ausgeführt – die ausgeprägte Dreidimensionalität der in Fenstermitte quer verlaufenden Streufelder in Frage (Fensterquerflüsse). Ihnen fehlt die bei ineinander angeordneten Spulen, die in Jochnähe enden, vorhandene Fokussierung der Felder auf die Kernebene, die in dem verwendeten zweidimensionalen Modell zugleich die Modell-ebene darstellt. Jedoch zeigt sich, dass die Feldberechnung immerhin noch einen Richtwert liefern kann.

Modell-Nr.	$u_k$
1	29,73 %
2	30,38 %
3	32,00 %
4	32,51 %
Messwert	25,06 %

Tabelle 3.36: Mittelwert der aus den einphasigen Modellierungen bestimmten relativen Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen des Kurzschlussversuches 4 beim 63-MVA-Doppelstock-Transformator.

Als Ergebnis der einphasigen Streuinduktivitätsberechnung am Beispiel des 63-MVA-Doppelstock-Transformators bleibt festzuhalten, dass der Kurzschlussversuch 1 und mit kleinen Abstrichen auch die Kurzschlussversuche 2 und 3 mit brauchbarer Genauigkeit berechenbar sind. Damit können die wesentlichen Betriebsparameter des Doppelstock-Transformators bestimmt werden.

Für den praktischen Einsatz ist der Kurzschlussversuch 4, bei dem es sich um eine 1:1-Übersetzung zwischen die Unterspannungswicklungen handelt, weniger wichtig. Insofern fällt die dort fehlende Genauigkeit der Ergebnisse geringer ins Gewicht. Interessant sind in diesem Zusammenhang die Ergebnisse der im nächsten Abschnitt diskutierten dreiphasigen Berechnungen.

#### 3.5.3 Dreiphasig ermittelte Streuinduktivitäten

Bei den hier diskutierten dreiphasig ermittelten Streuinduktivitäten kann – wie bei allen bisher untersuchten Transformatoren auch – nicht das eigentliche Ergebnis, sondern nur der Vergleich mit einphasigen Berechnungen auf gleicher Modellierungsstufe im Vordergrund stehen. Besonders bei den zahlreichen Windungen des Doppelstock-Transformators sind die

berechenbaren Modelle viel zu grob, als dass deren Ergebnisse als Referenzwerte herangezogen werden könnten. Liegt stattdessen eine gute Übereinstimmung zwischen einphasigen und dreiphasigen Berechnungen vor, bietet es sich wiederum an, auch die genaueren einphasigen Nachbildungen auf die dreiphasigen zu extrapolieren.

Für den 63-MVA-Doppelstock-Transformator ist es bisher nur möglich gewesen, das einfachste Modell 1 zu berechnen. Die hierfür benötigten Rechnerressourcen sind in der Tabelle 3.37 dargestellt.

Modell-Nr.	Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
1	34776	HP-V2250	2375 min	19913 MB

Tabelle 3.37: Laufzeiten und Speicherbedarf des dreiphasigen Modells des 63-MVA-Doppelstock-Transformators zur Bestimmung der relativen Kurzschluss-Spannung.

Für den Kurzschlussversuch 1 erhält man mit der Randelementmethode die relativen Kurzschluss-Spannungen nach Tabelle 3.38. Sie weichen je nach Stufenschalterstellung um bis zu 1,8 % von den Messwerten ab. Erneut darf die Tatsache, dass dieses grobe Modell die Messwerte recht gut nachbildet nicht überbewertet werden, weil die Anzahl der Leiter willkürlich gewählt worden ist. Für einen sinnvollen Vergleich mit den Messwerten kommen daher vornehmlich die genaueren Modelle 4 und 5 in Frage.

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung			$u_k$ bei maximaler Übersetzung			$u_k$ bei minimaler Übersetzung		
	Mitte	Links	Rechts	Mitte	Links	Rechts	Mitte	Links	Rechts
1	14,86 %	14,82 %	14,82 %	15,97 %	15,94 %	15,94 %	14,47 %	14,42 %	14,42 %
	Mittelwert: 14,84 %			Mittelwert: 15,95 %			Mittelwert: 14,44 %		
Messwert	15,11 %			16,21 %			14,18 %		

Tabelle 3.38: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen beim Kurzschlussversuch 1 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators bei dreiphasiger Modellierung.

Von Bedeutung sind vor allem die Differenzen zwischen den einphasigen und dreiphasigen Berechnungen des Kurzschlussversuchs 1 mit dem Modell 1 des Doppelstock-Transformators. Bemerkenswert ist wieder die gute Übereinstimmung für den Stufenschalter in Mittenstellung sowie für die maximale Übersetzung. Nur bei der minimalen Übersetzung differieren die ein- und dreiphasigen Rechnungen verhältnismäßig stark, vgl. dazu Tabelle 3.39.

Modell-Nr.	Abweichung bei Stufenschalter in Mittenstellung	Abweichung bei maximaler Übersetzung	Abweichung bei minimaler Übersetzung
1	-0,20 %	0,06 %	3,43 %

Tabelle 3.39: Relative Abweichung der dreiphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen von den einphasig ermittelten beim Kurzschlussversuch 1 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators.

Auch bei den Kurzschlussversuchen 2 und 3 erweist sich das Modell 1 als recht genau. Wie die Tabellen 3.40 und 3.41 zeigen, beträgt die maximale Abweichung von den Messwerten nur etwa 2 %. Ebenfalls bemerkenswert ist die geringe Differenz zu den Ergebnissen der einphasigen Rechnungen.

### 3.5 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines 63-MVA-Doppelstock-Transformators

Modell-Nr.	$u_k$ bei Stufenschalter in Mittenstellung			$u_k$ bei maximaler Übersetzung			$u_k$ bei minimaler Übersetzung		
	Mitte	Links	Rechts	Mitte	Links	Rechts	Mitte	Links	Rechts
1	13,74 %	13,70 %	13,70 %	14,40 %	14,35 %	14,35 %	13,12 %	13,10 %	13,10 %
	Mittelwert: 13,71 %			Mittelwert: 14,37 %			Mittelwert: 13,11 %		
Messwert	13,80 %			14,37 %			13,39 %		

Tabelle 3.40: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen bei den Kurzschlussversuchen 2 und 3 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators bei dreiphasiger Modellierung.

Modell-Nr.	Abweichung bei Stufen- schalter in Mittenstellung	Abweichung bei maxi- maler Übersetzung	Abweichung bei mini- maler Übersetzung
1	-0,07 %	0,07 %	0,15 %

Tabelle 3.41: Relative Abweichung der dreiphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen von den einphasig ermittelten bei den Kurzschlussversuchen 2 und 3 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators.

Schließlich ist noch der Kurzschlussversuch 4 zu betrachten. Mit rund 20 % Abweichung vom Messwert gemäß Tabelle 3.42 kann auch hier festgestellt werden, dass die Probleme, das Streufeld zu erfassen, die dreiphasigen Modelle in gleicher Weise betreffen wie die einphasigen.

Modell-Nr.	$u_k$			
	Mitte	Links	Rechts	Mittelwert
1	30,95 %	30,00 %	30,00 %	30,32 %
Messwert	25,06 %			

Tabelle 3.42: Numerisch ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen aller drei Stufenschalterstellungen beim Kurzschlussversuch 4 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators bei dreiphasiger Modellierung.

In der Tabelle 3.43 sind die Abweichungen zwischen einphasigen und dreiphasigen Rechnungen des Kurzschlussversuchs 4 angegeben. Mit knapp 2 % sind diese zwar verhältnismäßig groß, der wesentliche Sachverhalt bei diesem Kurzschlussversuch bleibt davon jedoch unberührt.

Modell-Nr.	Abweichung
1	1,98 %

Tabelle 3.43: Relative Abweichung der dreiphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannung von den einphasig ermittelten beim Kurzschlussversuch 4 des 63-MVA-Doppelstock-Transformators.

Auch beim 63-MVA-Doppelstock-Transformator haben die berechenbaren dreiphasigen Modelle bis auf geringe Abweichungen die Ergebnisse der gemittelten einphasigen Rechnungen reproduziert. Bei den Kurzschlussversuchen, bei denen vermehrt dreidimensionale Querfelder eine Rolle spielen, liefern beide Arten der Streuinduktivitätsberechnung vergleichbare Abweichungen. Daher können die einphasigen Rechnungen offensichtlich auch für spezielle Geometrien wie z.B. den hier untersuchten Doppelstock-Transformator als Ersatz für dreiphasige Berechnungen dienen. Abschließend werden noch die für den Doppelstock-Transformator bestimmten Kurzschlussverluste mit ihren Messwerten verglichen.

### 3.5.4 Ermittlung der Kurzschlussverluste

Bei der Berechnung der Kurzschluss-Reaktanzen ergeben sich auch beim Doppelstock-Transformator die Kurzschlussverluste. In der Tabelle 3.44 sind die berechneten Kurzschlussverluste beim Kurzschlussversuch 1 dargestellt. Wie auch schon bei allen anderen berechneten Transformatoren liegen die Verluste bei den groben Modellen um ein Vielfaches zu hoch. Mit steigender Detailgenauigkeit und damit einhergehenden kleineren Leitern nehmen die Wirbelstromverluste ab, und die Kurzschlussverluste erreichen eine realistische Größenordnung. Beim 63-MVA-Doppelstock-Transformator überschreiten die Kurzschlussverluste  $P_k$  jedoch auch bei der feinsten Modellierung den Messwert um 22,5 %. Neben den bisher schon diskutierten Fehlerquellen ist bei diesem Transformator zusätzlich zu beachten, dass selbst im Modell 5 nur 16 Teileiter der Unterspannungswicklungen nachgebildet worden sind. Die einzelnen Teileiter sind dadurch um 25 % zu breit dargestellt und die Zusatzverluste damit ausgeprägter. Eine genauere Modellierung sollte sich den Messwerten noch weiter annähern können.

Modell-Nr.	$u_r$	$P_k$
1	1,66 %	1045,8 kW
2	1,22 %	768,6 kW
3	0,57 %	359,1 kW
4	0,42 %	264,6 kW
5	0,38 %	239,2 kW
Messwert	0,31 %	195,2 kW

Tabelle 3.44: Mit der Randelementmethode bestimmte Kurzschlussverluste  $P_k$  für den Kurzschlussversuch 1 des Doppelstock-Transformators.

Zusammen mit den Gleichstromverlusten können anschließend die Zusatzverluste bestimmt werden. Einem Messwert von  $P_Z = 52,3$  kW stehen berechnete 107,5 kW gegenüber. Zusätzlich zum Fehler bei den Kurzschluss-Verlusten  $P_k$  ergeben sich hier auch noch erhebliche Differenzen bei den Gleichstromverlusten. Etwa 8 % liegen die aus der Geometrie bestimmten Gleichstromverluste mit  $P_G = 131,7$  kW unterhalb der Messwerte von 142,9 kW. Als Fehlerquelle kommen dafür einerseits nicht im Modell berücksichtigte Verluste in den Zuleitungen sowie andererseits Messfehler in Frage.

Auch bei den Kurzschlussversuchen 2 und 3 sind die berechneten Verluste nur unwesentlich genauer. Wie die Tabelle 3.45 zeigt, ist  $u_r$  – und damit auch die Kurzschlussverluste  $P_k$  – um gut 12 % zu groß berechnet worden. Als Gleichstromverluste können in diesem Fall, bedingt durch den Betrieb nur eines Stockwerks, die Hälfte der für den Kurzschlussversuch 1 bestimmten Werte verwendet werden. Damit ergeben sich Messwerte von  $P_Z = 33,5$  kW für die Zusatzverluste. Berechnet worden ist ein Wert von 53,8 kW. Aus den oben genannten Gründen ist die Abweichung wiederum beträchtlich.

Mit der Verlustberechnung ist die Untersuchung des 63-MVA-Doppelstock-Transformators abgeschlossen. Im Weiteren wird eine Bauart betrachtet, die aufgrund ihrer geringen Windungszahl sogar vollständige dreiphasige Modellierungen mit mehr als einem Randelement pro Seite zulässt. Außerdem wird erstmals ein in seinen Abmessungen deutlich kleinerer Transformator nachgebildet.

Modell-Nr.	$u_r$	$P_k$
1	1,56 %	491,4 kW
2	1,19 %	374,9 kW
3	0,56 %	176,4 kW
4	0,42 %	132,3 kW
5	0,38 %	119,7 kW
Messwert	0,34 %	106,8 kW

Tabelle 3.45: Mit der Randelementmethode bestimmte Kurzschlussverluste  $P_k$  für die Kurzschlussversuche 2 und 3 des Doppelstock-Transformators.

### 3.6 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 50-kVA-Folientransformators

Abweichend von den bisher untersuchten Transformatoren wird nun ein Folientransformator betrachtet. Er ist sowohl bezüglich seiner Abmessungen als auch seiner Bemessungsleistung von 50 kVA im Vergleich deutlich kleiner. Als 400-V-/400-V-Trenntransformator betragen die Bemessungsströme primär- wie sekundärseitig 72,2 A. Wie bei solchen Einheiten üblich sind die Wicklungen in der Schaltgruppe YNyn0 ausgeführt.

Im Gegensatz zur herkömmlichen Bauweise verfügt ein Folientransformator über extrem dünne Windungen, die annähernd so hoch wie die Schenkel sind. Diese Windungen werden einschließlich Isolation aufeinander gewickelt. Bei dem vorliegenden Modell bestehen beide Wicklungen angesichts der niedrigen Spannung nur aus jeweils 54 Windungen. Aus diesem Grund ist es nicht nötig, verschiedene Modellierungsstufen einzuführen. Stattdessen ist die vollständige Nachbildung mit verschiedenen Randelementzahlen berechnet worden. In der Abbildung 3.16 ist der Folientransformator skizziert. Im Vergleich zur Unterspannungswicklung sind die Folien der Oberspannungswicklung dicker bei deutlich geringerer Höhe. Sie sind in vier Spulen untereinander angeordnet. Auch für diesen Transformator werden in den folgenden Abschnitten die bei einer Frequenz von 50 Hz berechneten Streuinduktivitäten sowie die Kurzschlussverluste diskutiert.

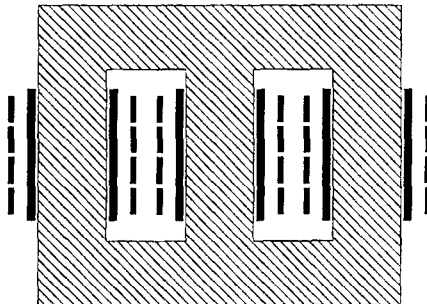


Bild 3.16: Prinzipieller Aufbau des 50-kVA-Folientransformators.

### 3.6.1 Einphasig ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen

Obwohl nicht notwendig, wird auch bei diesem Transformator die Übereinstimmung von einphasigen und dreiphasigen Nachbildungen überprüft. In der Tabelle 3.46 sind die durchgeführten einphasigen Rechnungen angegeben.

Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
10000	HP-V2250	23 min	405 MB
20000	HP-V2250	121 min	1604 MB
40000	HP-V2250	797 min	6382 MB
60000	HP-V2250	2487 min	15102 MB
80000	HP-N4000	3071 min	25051 MB

Tabelle 3.46: Laufzeiten und Speicherbedarf der einphasigen Modelle des 50-kVA-Folientransformators bei Nachbildung der mittleren Phase.

Bemerkenswert ist bei diesem Folientransformator die Tatsache, dass die energiegewichtete Länge  $l_{eg}$  nur um 0,4 % vom Mittelwert der geometrischen Windungslängen differiert. Dieser Effekt liegt im Wesentlichen an den identischen Strömen in beiden Wicklungen; denn dadurch stimmen die magnetischen Energien aller Windungen fast überein.

Zusätzlich zu den in Abschnitt 3.3.3 durchgeführten Betrachtungen bietet die Tabelle 3.47 einen weiteren Einblick, wie die mit der Randelementmethode bestimmten Streuinduktivitäten bzw. relativen Kurzschluss-Spannung konvergieren. Zu beachten ist dabei, dass die kleinste Rechnung mit zehn Randelementen pro Seite auf den Windungen und 100 Randelementen je Seite des Eisenkerns durchgeführt worden ist. Damit hat sich die relative Kurzschluss-Spannung dem Endergebnis schon weitgehend angenähert.

Randelemente	$u_k$
10000	3,53 %
20000	3,57 %
40000	3,59 %
60000	3,60 %
80000	3,61 %
Typenschild	3,8 %

Tabelle 3.47: Relative Kurzschluss-Spannungen des 50-kVA-Folientransformators bei Nachbildung der mittleren Phase.

Anschließend ist wiederum eine Phase auf einem äußeren Schenkel untersucht worden. Die durchgeführten Rechnungen sind der Tabelle 3.48 zu entnehmen. Anhand der Ergebnisse in Tabelle 3.49 ist ersichtlich, dass auch bei dem hier untersuchten Folientransformator die Kurzschluss-Spannungen der allein modellierten äußeren Phase im Durchschnitt um etwa 1 % niedriger liegen als bei der mittleren Phase. Eine Mittelung der relativen Kurzschluss-Spannung über alle drei Phasen liefert als Ergebnis der einphasigen Rechnungen  $u_k = 3,58 \%$ .

Bei dieser Bauart kann die berechnete relative Kurzschluss-Spannung nur mit den Angaben vom Typenschild verglichen werden, weil keine Messwerte vorlagen. Aus den genauesten Nachbildungen ergibt sich eine gemittelte relative Kurzschluss-Spannung von  $u_k = 3,58 \%$ ,

Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
10000	HP-V2250	69 min	1279 MB
20000	HP-V2250	462 min	5538 MB
40000	HP-V2250	1984 min	21189 MB
60000	HP-N4000	4298 min	37942 MB

Tabelle 3.48: Laufzeiten und Speicherbedarf der einphasigen Modelle des 50-kVA-Folientransformators bei Nachbildung der äußeren Phase.

Randelemente	$u_k$
10000	3,48 %
20000	3,52 %
40000	3,57 %
60000	3,57 %
Typenschild	3,8 %

Tabelle 3.49: Relative Kurzschluss-Spannungen des 50-kVA-Folientransformators bei Nachbildung einer äußeren Phase.

während das Typenschild diesen Wert mit  $u_k = 3,8 \%$  angibt. Der berechnete Wert ist damit um 6,1 % zu klein. Über die Genauigkeit der Typenschild-Angabe kann keine Aussage gemacht werden. Für sie gilt gemäß DIN VDE 0532 Teil 101 [16] eine mögliche Toleranz von 10 %.

Eine Ursache für ein ungenaues numerisches Ergebnis könnte durch die spezielle Konstruktion dieses Folientransformators bedingt sein. Im Gegensatz zu Transformatoren herkömmlicher Bauart muss die Stromeinspeisung über die gesamte Höhe der Windungen erfolgen. Die dafür verwendeten Ausleitungsschienen werden im Modell nicht erfasst, verursachen aber aufgrund ihrer axialen Ausdehnung zusätzliche Verluste. Weiterhin benötigen sie über die ganze Wicklungshöhe Platz, so dass die Wicklung keinen exakt kreisförmigen Querschnitt aufweist. Gerade bei den relativ kleinen Abmessungen dieses Transformators fallen möglicherweise solche Abweichungen von der Rotationssymmetrie stärker ins Gewicht. Eine Abwicklung im beschriebenen Sinn ist dann nur noch bei größeren Modellen zulässig, bei denen die nicht erfasste zusätzliche Krümmung geringer ausfällt.

Bei den im folgenden Abschnitt diskutierten relativen Kurzschluss-Spannungen, die aus dreiphasigen Modellen berechnet worden sind, ergeben sich ähnliche Ergebnisse.

#### 3.6.2 Dreiphasig ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen

In der dreiphasigen Nachbildung des 50-kVA-Folientransformators kann erstmals jede Windung berücksichtigt werden. Wie die Tabelle 3.50 zeigt, können bei diesem Folientransformator Modelle mit mehreren Randelementen pro Seite auch auf kleineren Rechnern bearbeitet werden.

In der Tabelle 3.51 sind die Ergebnisse der dreiphasigen Berechnungen angegeben. Deutlich zu erkennen ist, dass die Konvergenz der berechneten relativen Kurzschluss-Spannungen noch nicht erreicht ist. Die Ursache dafür ist in den geringeren Randelementzahlen pro Seite gegenüber den einphasigen Rechnungen zu suchen. Allerdings ergibt sich dennoch



Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
27600	HP-V2250	825 min	10245 MB
55200	HP-N4000	5328 min	41763 MB
110400	HP-N4000	11827 min	94903 MB

Tabelle 3.50: Laufzeiten und Speicherbedarf der dreiphasigen Modelle des 50-kVA-Folientransformators.

Randelemente	$u_k$			
	Mitte	Links	Rechts	Mittelwert
27600	3,53 %	3,51 %	3,51 %	3,52 %
55200	3,58 %	3,56 %	3,56 %	3,56 %
110400	3,59 %	3,57 %	3,57 %	3,58 %
Typenschild	3,8 %			

Tabelle 3.51: Relative Kurzschluss-Spannungen des 50-kVA-Folientransformators bei dreiphasiger Berechnung.

mit  $u_k = 3,58 \%$  ein mit dem Mittelwert der einphasigen Rechnungen übereinstimmendes Endergebnis. Es ist jedoch zu erwarten, dass mit noch genaueren Rechnungen dieser Wert leicht ansteigt, und somit die Differenz zur Typenschild-Angabe von  $u_k = 3,8 \%$  etwas geringer wird.

### 3.6.3 Berechnete Kurzschlussverluste

Im Gegensatz zu den anderen in dieser Arbeit untersuchten Transformatoren liegen bei dem 50-kVA-Folientransformator keine Messungen der Kurzschlussverluste vor. Lediglich für die Temperaturen von  $75^\circ \text{C}$  und  $120^\circ \text{C}$  sind vom Hersteller berechnete Werte bekannt. Mit linearer Extrapolation lassen sich damit die Kurzschlussverluste für die Referenztemperatur von  $20^\circ \text{C}$  zu  $P_k = 0,74 \text{ kW}$  abschätzen. Im Vergleich dazu liefern die durchgeführten Rechnungen mit  $u_r = 1,36 \%$  Kurzschlussverluste von  $P_k = 0,68 \text{ kW}$ . Dieses sind  $8,2 \%$  weniger als der geschätzte Sollwert. Da über dessen Genauigkeit keine Aussage getroffen werden kann, sollen die Verluste hier nicht weiter diskutiert werden. Abschließend wird noch ein weiterer Folientransformator untersucht.

## 3.7 Ergebnisse der Berechnungen am Beispiel eines realen 1600-kVA-Folientransformators

Als letztes Beispiel für die Berechnung der Streuinduktivitäten wird ein 1600-kVA-Folientransformator untersucht. Dieser Transformator weist eine überspannungsseitige Bemessungsspannung von  $6600 \text{ V}$  sowie  $433 \text{ V}$  auf der Unterspannungsseite auf, die als Breitbandwicklung ausgeführt ist. Im Gegensatz dazu besteht die Überspannungswicklung aus rechteckigen Kupferleitern. Eine schematische Darstellung des 1600-kVA-Folientransformators gibt die Abbildung 3.17.

Wie auch schon beim zuvor betrachteten 50-kVA-Folientransformator sind in diesem Fall verhältnismäßig wenige Windungen nachzubilden. Mit knapp 450 primären und 16 sekundären Windungen ist es wiederum möglich, den Transformator vollständig, d.h. dreipha-

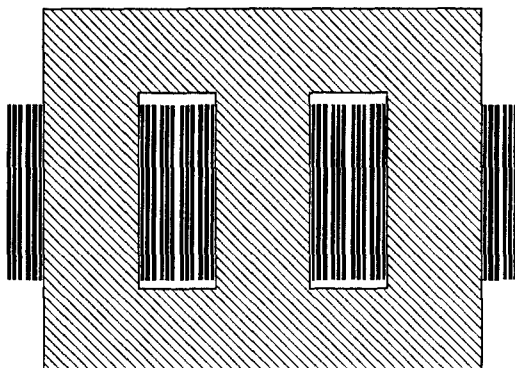


Bild 3.17: Prinzipieller Aufbau des 1600-kVA-Folientransformators.

sig, zu erfassen. Aus diesem Grund werden im Folgenden die Ergebnisse für Berechnungen mit erhöhten Randelementzahlen dargestellt.

#### 3.7.1 Einphasig ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen

Bei der numerischen Berechnung der Streuinduktivitäten einer einzelnen Phase auf dem mittleren Schenkel sind die in der Tabelle 3.52 angegebenen Rechnerressourcen benötigt worden. Als Ergebnisse haben sich dabei die relativen Kurzschluss-Spannungen ergeben, die in Tabelle 3.53 dargestellt sind. Schon bei relativ geringen Randelementzahlen ändert sich die berechnete relative Kurzschluss-Spannung nicht mehr wesentlich, und mit  $u_k = 6,07\%$  liegt der numerisch ermittelte Wert 2 % unterhalb der Messwerte des Herstellers.

Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
3848	HP-V2250	2 min	77 MB
19240	HP-V2250	91 min	1525 MB
38480	HP-V2250	613 min	6025 MB
76960	HP-N4000	2808 min	23729 MB
115440	HP-N4000	9406 min	54676 MB

Tabelle 3.52: Laufzeiten und Speicherbedarf der einphasigen Modelle des 1600-kVA-Folientransformators bei Nachbildung der mittleren Phase.

Neben der Berechnung einer einzelnen Phase auf dem mittleren Schenkel des Dreischenkelskerns ist ebenfalls eine Phase auf einem äußeren Schenkel untersucht worden. Dabei sind die in der Tabelle 3.54 angegebenen Rechnungen durchgeführt worden. Wie auch schon bei allen anderen in dieser Arbeit untersuchten Transformatoren fallen die dafür ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen gemäß Tabelle 3.55 um rund 2 % geringer aus als bei der mittleren Phase.

Eine Mittelung aus den einphasigen Rechnungen liefert als Endergebnis eine relative Kurzschluss-Spannung von  $u_k = 5,98\%$ , die knapp 3,5 % kleiner als der Messwert  $u_k = 6,17\%$  ist. Anschließend soll dieser Wert anhand von dreiphasigen Nachbildungen überprüft werden.

Randelemente	$u_k$
3848	6,05 %
19240	6,06 %
38480	6,06 %
76960	6,06 %
115440	6,07 %
Messwert	6,17 %

Tabelle 3.53: Relative Kurzschluss-Spannungen des 1600-kVA-Folientransformators bei Nachbildung der mittleren Phase.

Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
3848	HP-V2250	9 min	240 MB
19240	HP-V2250	320 min	4618 MB
38480	HP-N4000	1365 min	18145 MB
76960	HP-N4000	7229 min	58859 MB

Tabelle 3.54: Laufzeiten und Speicherbedarf der einphasigen Modelle des 1600-kVA-Folientransformators bei Nachbildung der äußeren Phase.

### 3.7.2 Dreiphasig ermittelte relative Kurzschluss-Spannungen

Mit nicht einmal 500 Windungen bietet auch der 1600-kVA-Folientransformator die Möglichkeit, in dreiphasigen Modellen alle Windungen zu berücksichtigen. Mit den verfügbaren Rechnern konnten, wie die Tabelle 3.56 zeigt, mehrere Randelemente pro Leiterseite verwendet werden. Die benötigte Rechenzeit sowie den Speicherplatz kann man dieser Tabelle entnehmen.

Wie in der Tabelle 3.57 angegeben ist, liegen die dreiphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen rund 3,7 % unterhalb der Messwerte. Damit erreichen die dreiphasigen Modelle eine Genauigkeit, die mit der von einphasigen Rechnungen vergleichbar ist. Auch bei dem 1600-kVA-Folientransformator weichen einphasige und dreiphasige Rechnungen bei gleicher Randelementezahl pro Leiterseite kaum von einander ab. Dem Ergebnis von  $u_k = 5,99$  % der genauesten dreiphasigen Rechnung steht das gewichtete Mittel von  $u_k = 5,98$  % der entsprechenden einphasigen Rechnungen gegenüber. Die relative Abweichung beträgt dabei weniger als 0,2 %.

Randelemente	$u_k$
3848	5,71 %
19240	5,93 %
38480	5,94 %
76960	5,94 %
Messwert	6,17 %

Tabelle 3.55: Relative Kurzschluss-Spannungen des 1600-kVA-Folientransformators bei Nachbildung einer äußeren Phase.

### 3.8 Ergebnisse der Streuinduktivitätsberechnung im Überblick

Randelemente	Rechner	CPU-Zeit	Speicher
11304	HP-V2250	121 min	2270 MB
56520	HP-N4000	4441 min	44157 MB
113040	HP-N4000	12186 min	98541 MB

Tabelle 3.56: Laufzeiten und Speicherbedarf der dreiphasigen Modelle des 1600-kVA-Folientransformators.

Randelemente	$u_k$			
	Mitte	Links	Rechts	Mittelwert
11304	5,85 %	5,72 %	5,72 %	5,76 %
56520	6,07 %	5,95 %	5,95 %	5,99 %
113040	6,07 %	5,95 %	5,95 %	5,99 %
Messwert				6,17 %

Tabelle 3.57: Relative Kurzschluss-Spannungen des 1600-kVA-Folientransformators bei dreiphasiger Berechnung.

#### 3.7.3 Berechnete Kurzschlussverluste

Ausgehend von einem  $u_r = 0,80\%$  ergeben sich aus der Bemessungsleistung von 1600 kVA die Kurzschlussverluste zu  $P_k = 12,8$  kW. Dieser Wert liegt erheblich unter den gemessenen Verlusten von 15,7 kW. Dafür können die oben schon erwähnten Verluste in den axialen Zuleitungsschienen, die das Modell nicht erfasst, ausschlaggebend sein. Wie bei allen anderen in dieser Arbeit untersuchten Transformatoren kann die Verlustberechnung auch hier nur orientierende Aussagen liefern. Im folgenden Abschnitt werden die wichtigsten Ergebnisse der Streuinduktivitätsberechnung aus der Untersuchung von fünf verschiedenen Transformatoren noch einmal zusammengefasst.

### 3.8 Ergebnisse der Streuinduktivitätsberechnung im Überblick

In diesem Kapitel ist anhand von zum Teil sehr unterschiedlichen Transformatoren gezeigt worden, mit welcher Genauigkeit es die Randelementmethode ermöglicht, mit einem zweidimensionalen Modell die Streuinduktivität von Transformatoren ohne Verwendung von Erfahrungsfaktoren zu bestimmen. Als wesentliche Ergebnisse sollen festgehalten werden:

1. Mit der Randelementmethode ist es möglich, die Streuinduktivitäten von Leistungstransformatoren zu bestimmen. Abweichungen von unter 5 % sind dabei die Regel. Für detaillierte Modelle ist – nach heutigem Stand – Höchststreckenleistung erforderlich, größere Modelle mit deutlich abgesenkten Rechnerressourcen sind jedoch nur wenig ungenauer.
2. Auch für Sonderkonstruktionen ist das Verfahren anwendbar. Nur wenn die Felder zu ausgeprägt dreidimensional werden, z.B. weil Spulen in der Fenstermitte enden und dadurch ein Querfeld erzeugen, können nur noch Richtwerte bestimmt werden.
3. Um Rechnerressourcen zu sparen, können einphasige Rechnungen verwendet werden. Mittelt man die Ergebnisse einzelner einphasiger Berechnungen von Wicklungen auf

dem mittleren und äußeren Schenkel, so sind einerseits die insgesamt benötigten Rechnerressourcen immer noch deutlich kleiner als bei dreiphasigen Rechnungen, andererseits werden deren Ergebnisse sehr genau reproduziert.

4. Nullinduktivitäten und Kurzschlussverluste können derzeit nur als Richtwerte bestimmt werden. Im Vergleich zu den Streuinduktivitäten liegen die Abweichungen von Vergleichswerten deutlich höher.

Als weitere Anwendung der Streuinduktivitätsberechnung wird im nächsten Kapitel die Kraftberechnung diskutiert. Die Randelementmethode ermöglicht einen einfachen Weg, die Kräfte auf ganze Wicklungen oder Teile davon zu berechnen.

## 4 Kraftberechnung mit der Randelementmethode

Mit der Randelementmethode kann man die Felder und die lokalen Stromverteilungen in den Leitern bestimmen. Es ist deshalb ebenfalls möglich, die auf die Leiter wirkenden Lorentz-Kräfte durch eine Integration zu berechnen. Als Alternative bietet sich an, über die bisher bestimmten Induktivitäten Kräfte auf die Leiter zu berechnen. Dazu ermittelt man aus den als eingepreßt anzusehenden Strömen die magnetische Energie, die mit den Windungen verknüpft ist. Durch die Differentiation der Energie nach einer kleinen Verschiebung ergibt sich die Kraft auf die verschobenen Leiter. Beide Methoden weisen verschiedene Vor- und Nachteile auf, die in diesem Kapitel diskutiert werden.

### 4.1 Kraftberechnung mit dem Lorentz-Integral

Zunächst soll die klassische Berechnung der Kraft erläutert werden, wenn die magnetischen Felder und die lokale Stromverteilung bekannt sind. Man benutzt die bekannte Lorentz-Formel

$$\vec{F} = l \cdot (\vec{e} I \times \vec{B}), \quad (4.1)$$

um die mechanische Wirkung des magnetischen Feldes auf einen geradlinigen Linienleiter der Länge  $l$  und der Richtung  $\vec{e}$  zu beschreiben, in dem ein Strom  $I$  fließt. Bei ausgedehnten Leitern mit einer Querschnittsfläche  $V$  geht diese Gleichung in das Integral

$$\vec{F} = l \cdot \int_V (\vec{S}(x, y) \times \vec{B}(x, y)) dx dy \quad (4.2)$$

über. Dabei muss die tatsächliche Stromdichte  $\vec{S}(x, y)$  bekannt sein, die auch Wirbelströme enthält. Im Gegensatz dazu braucht das Eigenfeld eines geradlinigen Leiters, für den die Kraftwirkung bestimmt wird, bei der Berechnung von  $\vec{B}(x, y)$  nach [18] nicht berücksichtigt zu werden. Um das Integral (4.2) numerisch möglichst genau auswerten zu können, ist die Kenntnis der lokalen Stromdichte  $\vec{S}(x, y)$  und des Magnetfeldes  $\vec{B}(x, y)$  von allen anderen Leitern an jeder beliebigen Stelle innerhalb der Querschnittsfläche  $V$  des Leiters nötig.

Einen deutlichen Vorteil weist dabei die Randelementmethode gegenüber anderen Feldberechnungsverfahren auf. Bei der numerischen Auswertung der Gleichung (4.2) kann – unabhängig von der Randelementverteilung und damit der Diskretisierung – ein beliebig feines Raster gewählt werden. Bei den anderen Verfahren ist das Feld immer nur an ausgewählten Punkten bekannt. Dazwischen muss interpoliert werden. Natürlich bedeutet die erhöhte Genauigkeit auch die Inkaufnahme von hohen Rechenzeiten, denn die Felder und Ströme an jedem Integrationspunkt müssen erst berechnet werden. Hinzukommt, dass bei einer ausgeprägten Stromverdrängung zu den Leiterrändern hin dort sehr feinmaschig integriert werden muss.

Neben diesen Problemen gibt es speziell bei der Kraftberechnung mit der Randelementmethode noch drei weitere Gesichtspunkte, die die Anwendung der Lorentz-Integration (4.2) unattraktiv machen. Zum einen wird – wie oben beschrieben – das Magnetfeld ohne den Anteil des Leiters benötigt, auf den man die Kraftwirkung bestimmen will. Andererseits muss für die lokale Stromverteilung in diesem Leiter das Eigenfeld berücksichtigt werden. Die

Kraftberechnung für einen Leiter benötigt somit zwei Feldberechnungen. Für jeden zusätzlichen Leiter, auf den die Kraft bestimmt werden soll, kommt eine weitere hinzu. Diese verschiedenen Feldprobleme können jedoch nicht – wie bei der Streuinduktivitätsberechnung – gleichzeitig gelöst werden. Damit sich keine Wirbelströme in dem Leiter ausbilden, auf den die Kraft bestimmt werden soll, die wiederum das Gesamtfeld beeinflussen, muss dieser Leiter komplett aus der Feldberechnung entfernt werden. Somit ist die Bestimmung der Kräfte für eine große Anzahl an Leitern bei umfangreichen Modellen durch die zahlreichen Rechnungen praktisch nicht einsetzbar.

Ein zweites Problem besteht in der Verletzung der Bedingung (2.34). Sie fordert das Verschwinden der Summe der eingepprägten Ströme. Nimmt man einen Leiter aus der Rechnung heraus, führt das zwangsläufig dazu, dass sich die Stromsumme der übrigen Leiter nicht mehr zu Null ergänzt, sofern der betroffene Leiter nicht stromlos gewesen ist. Zwar hat sich in der Praxis gezeigt, dass der dadurch entstandene Fehler gering ist, allerdings kann keine Aussage darüber getroffen werden, ob dieses stets der Fall ist.

Zudem ist bei der Berechnung der Kräfte über das Lorentz-Integral (4.2) zu beachten, dass das lineare Gleichungssystem der Randelementmethode zur Bestimmung der Felder und Ströme vollständig gelöst werden muss – im Unterschied zur Berechnung der Streuinduktivitäten. Daher werden bei der Berechnung deutlich mehr Speicher und Rechenzeit benötigt. Insgesamt zeigt sich, dass diese Art der Kraftberechnung über das Lorentz-Integral zwar durchführbar ist, jedoch für umfangreiche Systeme wie Leistungstransformatoren der Umfang der Rechnungen zur Zeit über ein akzeptables Maß hinausgeht. Zur Veranschaulichung dieser Zusammenhänge wird im Folgenden ein einfaches Beispiel vorgestellt. Ein Leiterpaar mit einem großen Mittenabstand im Verhältnis zum Leiterquerschnitt dient als Vergleich zu den theoretisch berechneten Werten bei punktförmigen Leitern.

### 4.1.1 Beispiel für die Kraftberechnung über das Lorentz-Integral

In diesem Abschnitt soll die erzielbare Genauigkeit der Kraftberechnung über das Lorentz-Integral (4.2) den dazu benötigten Rechenzeiten gegenübergestellt werden. Des Weiteren soll die Kraftwirkung mit derjenigen verglichen werden, die zwischen zwei Linienleitern gleichen Mittenabstandes auftritt. Als Referenz dient dazu das Leiterpaar aus Abbildung 4.1. Die quadratischen Leiter weisen eine Kantenlänge  $a$  auf, die gegenüber dem Mittenabstand  $d$  der Leiter vernachlässigt werden kann. Dann ist die Approximation durch Linienleiter eine hinreichende Näherung.

Für das Magnetfeld eines punktförmigen Leiters, in dem der Strom  $I$  fließt, gilt im Abstand

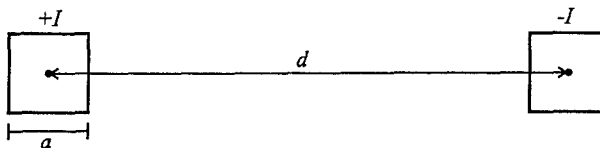


Bild 4.1: Quadratisches Leiterpaar mit Kantenlänge  $a$  bzw. Linienleiter im Mittelpunkt der Quadrate. Der Mittenabstand beträgt  $d \gg a$ .

$r$  vom Leitermittelpunkt

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}. \quad (4.3)$$

Nach [19] wirkt somit auf einen Linienleiter der Länge  $l$  im Abstand  $d$  eine Kraft vom Betrag

$$F = l \cdot \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi d}, \quad (4.4)$$

wenn wie im Beispiel die Leiter die Ströme  $+I$  und  $-I$  führen. Bei einen angenommenen Abstand von  $d = 1$  m und eingepprägten Strömen von  $I = 100$  A ergibt sich als Referenzlösung eine Kraft von

$$F' = \frac{F}{l} = 2 \frac{\text{mN}}{\text{m}} \quad (4.5)$$

entlang der Verbindungsachse. Da es bei Leitern mit punktförmigem Querschnitt keine Wirbelströme gibt, ist dieses Ergebnis unabhängig von der Frequenz des Stroms.

Bei der Berechnung der Kraft mit der Randelementmethode und der Lorentz-Integration wird für das Leiterpaar ebenfalls ein Mittenabstand von  $d = 1$  m gewählt. Die Kantenlänge soll  $a = 1$  cm betragen, so dass wegen  $d \gg a$  die Ergebnisse mit dem Linienleiter vergleichbar sind. Bei einer Frequenz von 50 Hz ergeben sich für verschiedene Genauigkeiten berechnete Kräfte, die um weniger als 0,5 % vom Referenzwert abweichen. Mit nur einem geringen Mehraufwand können Abweichungen von unter 0,05 % erreicht werden. Man muss für diese Genauigkeit mindestens 10000 Stützstellen pro Leiter bei der Integration in Gleichung (4.2) verwenden. Die Anzahl der Randelemente ist dabei nicht relevant. Auf den verwendeten Rechnern dauern Rechnungen dieser Art weniger als eine Minute und benötigen nur einige Kilobytes Speicher.

Anders ist die Situation, wenn eine höhere Frequenz betrachtet wird. Bei 1 MHz bewirkt die Stromverdrängung zu den Rändern hin eine deutliche Verschlechterung der numerischen Integration. Die Tabelle 4.1 zeigt, wie bei einer gleichmäßigen Verteilung der Stützstellen ein erheblicher Teil des eingepprägten Stromes nicht erfasst wird, wenn die lokale Stromdichte über den Leiterquerschnitt integriert wird. Es sei an dieser Stelle jedoch darauf hingewiesen, dass für die Berechnung der Wicklungskräfte von Leistungstransformatoren nur Frequenzen untersucht werden müssen, die weit unterhalb von 1 MHz liegen.

Stützstellen	erfasster Strom	Rechenzeit
100	89,5 %	2 s
400	94,4 %	5 s
2500	96,1 %	28 s
10000	96,9 %	110 s
250000	96,9 %	2710 s
1000000	97,7 %	10860 s

Tabelle 4.1: Erfasster Strom und benötigte Rechenzeit für verschiedene Stützstellenzahlen bei der numerischen Integration der Kraft über die Lorentz-Formel.



## 4.2 Kraftberechnung über die magnetische Energie

Trotz einer wesentlich erhöhten Anzahl von Stützstellen konvergiert das Integral über die Stromdichte nur sehr langsam auf den Referenzwert. Gleichzeitig wächst die Rechenzeit stark an. Durch eine zu den Rändern hin steigende Anzahl der Stützstellen kann die Konvergenz geringfügig verbessert werden. Weiterhin ist die Kraft um den Faktor des zu wenig erfassten Stroms zu korrigieren. Man nimmt dabei an, dass sich der fehlende Strom gleichmäßig über den Leiter verteilt. Berücksichtigt man diesen Korrekturfaktor, so ergeben sich für die oben beschriebenen Rechnungen die Ergebnisse in der nachfolgenden Tabelle 4.2.

Stützstellen	$F'$
100	1,813 mN/m
400	1,884 mN/m
2500	1,871 mN/m
10000	1,894 mN/m
250000	1,861 mN/m
1000000	1,867 mN/m

Tabelle 4.2: Mit der Lorentz-Integration bestimmte Kräfte auf einen Leiter des quadratischen Leiterpaares aus Abbildung 4.1.

Erst bei einer großen Anzahl Stützstellen konvergiert das Ergebnis. Bei der Berechnung der Streuinduktivitäten ist eine deutlich bessere Konvergenz festzustellen. Deshalb wird im Weiteren die Kraftberechnung allein über die magnetische Energie untersucht.

## 4.2 Kraftberechnung über die magnetische Energie

Bei einer infinitesimal kleinen und langsamen Verschiebung  $dx$  eines physikalischen Systems gegen eine konstante Kraft  $F$  ergibt sich eine Energieänderung von

$$dW = F \cdot dx. \quad (4.6)$$

Man kann dann bei dem untersuchten System von induktiv gekoppelten Windungen davon ausgehen, dass die bei dieser Verschiebung verrichtete Arbeit vollständig in das magnetische Feld überführt wird, das von den stromdurchflossenen Windungen erzeugt wird. Das heißt, man vernachlässigt jede durch die Verschiebung verursachte Änderung in den Wirbelströmen. Ein Vergleich der numerisch ermittelten Kurzschlussverluste  $u_r$  vor und nach solchen Verschiebungen zeigt, dass diese Annahme berechtigt ist.

Für ein Leiterpaar bzw. eine Windung ergibt sich die magnetische Energie  $W_m$  nach [20] zu

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2, \quad (4.7)$$

wobei  $L$  die Selbstinduktivität bezeichnet. Für Systeme von  $n$  induktiv gekoppelten Leiterpaaren wird diese Gleichung in vektorieller Schreibweise als Bilinearform

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot (I_1, I_2, \dots, I_n) \cdot \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

dargestellt. Aus der Energieänderung – verursacht durch eine kleine Verschiebung  $\Delta x$  einer Leiter – kann man die nach Gleichung (4.6) Kraft bestimmen, die in Richtung dieser Verschiebung wirkt. So gilt für den Betrag der Kraft

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta x}, \quad (4.9)$$

wobei  $\Delta W = W_1 - W_0$  die Energiedifferenz zwischen dem verschobenen und dem Ausgangszustand darstellt. Im vorliegenden Fall kann man einen Leiter oder sogar eine ganze Gruppe von Leitern, z.B. eine Wicklung, verschieben und mit der Randelementmethode die veränderte Induktivitätsmatrix berechnen. Damit sind auch hier zwei Feldberechnungen notwendig, um die Kraft zu ermitteln, die auf alle verschobenen Leiter entlang der Verschiebungsrichtung wirkt. In diesem Punkt entspricht die Energiemethode der Lorentz-Integration.

Um die Genauigkeit der numerischen Differentiation zu steigern, sollte neben der Verschiebung  $\Delta x$  auch die entgegengesetzte um  $-\Delta x$  betrachtet werden. Damit wird der Gradient der magnetischen Energie in beide Richtungen ausgewertet. Dies führt nach [21] nur zu einem Fehler der Ordnung  $O(\Delta x^2)$  anstatt von  $O(\Delta x)$  bei einer einseitigen Betrachtung. Für eine zweite Koordinatenrichtung kann die Basisrechnung ebenfalls genutzt werden; zusätzliche Durchläufe mit entsprechend anderen Verschiebungen – um z.B.  $\Delta y$  – sind jedoch vorzunehmen.

Besteht das gesamte System nur aus einem Leiterpaar, so folgt aus Gleichung (4.7)

$$\Delta W = W_1 - W_0 = \frac{1}{2} L_1 I^2 - \frac{1}{2} L_0 I^2 = \frac{1}{2} \Delta L I^2 \quad (4.10)$$

mit  $\Delta L = L_1 - L_0$ . Daraus ergibt sich mit

$$F' = \frac{F}{l} = \frac{\Delta W}{l \cdot \Delta x} = \frac{1}{2} \frac{\Delta L'}{\Delta x} I^2 \quad (4.11)$$

die auf die Länge  $l$  bezogene Kraft auf das System entlang der Richtung von  $\Delta x$ . Mit der Beziehung (4.8) folgt analog dazu für ein System aus  $n$  Leiterpaaren

$$F' = \frac{1}{2\Delta x} \cdot (I_1, I_2, \dots, I_n) \cdot \begin{pmatrix} \Delta L'_{11} & \Delta L'_{12} & \dots & \Delta L'_{1n} \\ \Delta L'_{21} & \Delta L'_{22} & \dots & \Delta L'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta L'_{n1} & \Delta L'_{n2} & \dots & \Delta L'_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

An dieser Stelle soll der Spezialfall eines Zweiwicklungstransformators näher betrachtet werden. Aus Gleichung (4.12) wird dann

$$F' = \frac{1}{2\Delta x} \cdot (I_1, I_2) \cdot \begin{pmatrix} \Delta L'_{11} & \Delta L'_{12} \\ \Delta L'_{21} & \Delta L'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

wobei der Index 1 wiederum die Oberspannungswicklung und der Index 2 die Unterspannungswicklung kennzeichnet. Die Matrizen können zu

$$F' = \frac{1}{2\Delta x} (\Delta L'_{11} I_1^2 + (\Delta L'_{12} + \Delta L'_{21}) I_1 I_2 + \Delta L'_{22} I_2^2) \quad (4.14)$$

ausmultipliziert werden. Mit  $\Delta L' = L'_1 - L'_0$  und Gleichung (3.32) gilt

$$\Delta L'_{ij} = w_i w_j \cdot (\Lambda'_{ij,1} - \Lambda'_{ij,0}), \quad (4.15)$$

wenn  $\Lambda'_{ij,0}$  die Leitwerte in der Ausgangslage und  $\Lambda'_{ij,1}$  die der verschobenen Geometrie bezeichnet. Zusätzlich ist zu beachten, dass  $I_1$  und  $I_2$  als Ströme in Ober- und Unterspannungswicklung in der Beziehung

$$I_2 = -\frac{w_1}{w_2} I_1 \quad (4.16)$$

stehen, wenn der Magnetisierungsstrom von unter 1 % vom Nennstrom vernachlässigt wird. Das negative Vorzeichen beruht auf der Konvention der Stromrichtungen. Ein in positiver  $z$ -Richtung fließender Strom in den Hinleitern der Windungen wird positiv gezählt. Dadurch muss in einer der beiden Wicklungen ein negativer Strom fließen. In die Gleichung (4.14) eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} F' &= \frac{1}{2\Delta x} (\Lambda'_{11,1} - \Lambda'_{11,0} - (\Lambda'_{12,1} - \Lambda'_{12,0} + \Lambda'_{21,1} - \Lambda'_{21,0}) + \Lambda'_{22,1} - \Lambda'_{22,0}) \cdot w_1^2 I_1^2 \\ &= \frac{1}{2\Delta x} (\Lambda'_{11,1} - \Lambda'_{12,1} - \Lambda'_{21,1} + \Lambda'_{22,1} + \Lambda'_{11,0} - \Lambda'_{12,0} - \Lambda'_{21,0} + \Lambda'_{22,0}) \cdot w_1^2 I_1^2 \\ &= \frac{1}{2\Delta x} (L'_{\sigma,1} - L'_{\sigma,0}) \cdot w_1^2 I_1^2 = \frac{\Delta L'_{\sigma}}{2\Delta x} \cdot w_1^2 I_1^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

unter Verwendung der Definition der Streuinduktivität  $L_{\sigma,i} = \Lambda'_{11,i} - \Lambda'_{12,i} - \Lambda'_{21,i} + \Lambda'_{22,i}$  aus den Gleichungen (3.10) und (3.33). Für einen Zweiwicklungstransformator ergibt sich also die Kraft aus der Änderung der Streuinduktivität infolge einer geringen Verschiebung  $\Delta x$ . Mit diesem Ergebnis geht jedoch auch ein numerisches Problem einher: Die Streuinduktivitäten werden aus Differenzen von Leitwerten gewonnen, die sich typischerweise erst in der vierten Stelle nach dem Komma unterscheiden. Aus solchen Streuinduktivitäten zweier leicht unterschiedlicher Rechnungen wird wiederum eine Differenz gebildet. Bei Verschiebungen um 1 mm unterscheiden sich die Streuinduktivitäten erst in der fünften oder sechsten Stelle, so dass insgesamt die Kräfte aus Differenzen von Induktivitäten berechnet werden, deren führende acht Stellen identisch sind. Ob die aus der Lösung eines linearen Gleichungssystems von über 100000 Gleichungen gewonnenen Induktivitäten trotz der Verwendung doppelt genauer Zahlen eine solche Genauigkeit aufweisen, kann nicht sichergestellt werden. Bevor auf diese Rechnungen eingegangen wird, soll zunächst das obige Beispiel für die Kraftberechnung erneut aufgegriffen werden.

### 4.2.1 Beispiel für die Kraftberechnung über die magnetische Energie

Im Abschnitt 4.1.1 ist die Kraft auf einen Leiter des Leiterpaares aus Abbildung 4.1 über die Integration der Lorentz-Kraft diskutiert worden. Während sich die Kraft bei einer Frequenz von 50 Hz mit Rechnungen von nur wenigen Sekunden Dauer präzise bestimmen ließ, waren die Kräfte bei 1 MHz auch mit mehr Randelementen sowie einen Vielfachen an Stützstellen bei der Integration nicht mehr hinreichend genau zu ermitteln, weil die Stromverteilung durch Wirbelströme nicht mehr aufgelöst werden konnte.

Ganz anders stellt sich die Situation bei der Verwendung der Kraftberechnung über die magnetische Energie gemäß Gleichung (4.11) dar. Die Berechnung der Selbstinduktivität des betrachteten Leiterpaares dauert unabhängig von der Frequenz nur wenige Sekunden, wenn die Rechnungen – wie im vorangegangenen Beispiel – mit nur 10 Randlelementen pro Seite durchgeführt werden. Als Verschiebung wird 0,1 mm gewählt. Beide Leiter werden um diese Strecke nach außen verschoben, so dass die Symmetrie erhalten bleibt. Damit beträgt  $\Delta x = 0,0002$  m.

Wie die Tabelle 4.3 zeigt, ergeben sich bei beiden Frequenzen mit der Energiemethode die gleichen Kräfte. Die Kraft stimmt außerdem genau mit der theoretischen Referenzlösung für Linienleiter gleichen Mittenabstandes überein.

Frequenz	$L'$ in $10^{-12}$ H/m unverschoben	$L'$ in $10^{-12}$ H/m verschoben	$\Delta L'$ in $10^{-12}$ H/m bei $\Delta x = 0,0002$ m	$F'$
50 Hz	2161846	2161926	80	2,000 mN/m
1 MHz	2055908	2055988	80	2,000 mN/m

Tabelle 4.3: Ergebnisse der Kraftberechnung über die Energiemethode bei verschiedenen Frequenzen.

Zu untersuchen bleibt noch, wie gut die Kraftberechnung senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Leiter funktioniert. Theoretisch ist in diesem Fall keine Kraft zu erwarten und auch die Lorentz-Integration liefert nur einen verschwindend geringen Wert von  $10^{-8}$  mN/m. Bei einer numerischen Integration ist es natürlich fast unmöglich, genau Null zu berechnen. Als zweite Rechnung wird für die Energiemethode hier eine Verschiebung nur eines Leiters um  $\Delta y = 0,1$  mm gewählt. Eine Verschiebung beider Leiter ohne weiteren Bezugspunkt in der Rechnung ist nicht sinnvoll, da es sich dann immer noch um die gleiche Geometrie handelt.

Bei beiden untersuchten Frequenzen erhöht sich die bezogene Selbstinduktivität des Leiterpaares um  $2 \cdot 10^{-15}$  H/m, wenn ein Leiter um  $\Delta y = 0,1$  mm verschoben wird. Dieses entspricht einer Kraft von  $F' = 0,2 \mu\text{N/m}$ . Damit die Energiemethode für diese Kraft exakt Null liefert, ist für jede Frequenz eine weitere Rechnung mit einer entgegengesetzten Verschiebung nötig. Bei einer Rechnung mit  $\Delta y = -0,1$  mm ergibt sich ebenfalls eine Erhöhung der Selbstinduktivität um  $2 \cdot 10^{-15}$  H/m. Aufgrund der entgegengesetzten Verschiebung beträgt die Kraft in diesem Fall jedoch  $F' = -0,2 \mu\text{N/m}$ , so dass sich insgesamt der Mittelwert von  $F' = 0$  N/m einstellt. Abschließend sollen die beiden Methoden der Kraftberechnung noch einmal verglichen werden.

#### 4.2.2 Gegenüberstellung der beiden Methoden zur Kraftberechnung

Bei dem Vergleich der beiden vorgestellten Methoden seien besonders die Gesichtspunkte Rechenzeit und Speicherbedarf sowie die Genauigkeit betrachtet.

- **Rechenzeit:** Eine eindeutige Aussage, welche Methode die schnellere ist, lässt sich nicht treffen. Ein einfaches Beispiel soll dieses belegen. Betrachtet wird dabei ein Modell, das für die Streuinduktivitätsberechnung eine Zeiteinheit (ZE) benötigt. Grundlage für die Lorentz-Integration ist eine Feldberechnung, die – wie das Beispiel im Anhang A zeigt – etwa 30 % mehr Matrixoperationen benötigt, also hier mit einem Zeitaufwand von 1,3 ZE abgeschätzt wird. Ein solche Rechnung ist für jeden Leiter

nötig, für den die Kraftwirkung bestimmt werden soll. Hinzukommen die Basisrechnung sowie eine von der erforderlichen Genauigkeit abhängige Zeit für die numerische Integration. Will man die Kräfte auf  $n$  einzelne Leiter bestimmen, benötigt man mindestens  $1, 3 \cdot (n + 1)$  ZE für die Kräfte in beide Koordinatenrichtungen.

Bei der Methode über die magnetischen Energien ist für jede Kraft mindestens eine weitere Streuinduktivitätsberechnung notwendig. Der Zeitbedarf summiert sich damit auf  $(n + 1)$  ZE, wenn man die Kräfte nur in eine Koordinatenrichtung benötigt, bzw.  $(2 \cdot n + 1)$  ZE, wenn beide Richtungen berechnet werden sollen. In diesen Fällen ist die Methode der Lorentz-Integration immer schneller. Interessiert jedoch nur die summarische Kraft auf eine ganze Wicklung, ist bei der Energiemethode nur eine zusätzliche Rechnung erforderlich. Insgesamt werden dann 2 ZE benötigt. Beispielsweise wäre die Lorentz-Integration bei 770 Leitern in der untersuchten Windung mit über 1000 ZE zu veranschlagen. Für die Bestimmung von Wicklungskräften ist damit die Energiemethode immer schneller.

- **Speicher:** Im Gegensatz zur Rechenzeit fällt der Vergleich der beiden Methoden bezüglich des Speicherbedarfs deutlich zu Gunsten der Energiemethode aus. Die teilweise Lösung des Gleichungssystems benötigt rund 30 % weniger Speicher als die für die Feldberechnung nötige vollständige Lösung. Hinzukommt, dass für die Kraftberechnung über die magnetische Energie möglicherweise bei der Induktivitätsbestimmung Symmetrien ausgenutzt werden können. Dieses ist bei der Integrationsmethode nicht möglich, wie auf Seite 88 beschrieben.

Bei Ausnutzung von Symmetrien reduziert sich der Speicher auf etwa ein Viertel des ursprünglichen Bedarfs. Damit würde die Lorentz-Integration etwa das Fünffache an Speicher benötigen. Für detaillierte Modelle kann dieses das entscheidende Kriterium sein.

- **Genauigkeit:** Wie die vorangegangenen Beispiele gezeigt haben, kann es bei der Kraftberechnung mit der Lorentz-Integration zu Konvergenzproblemen kommen. Diese treten besonders bei höheren Frequenzen auf, wenn Wirbelströme den Strom an den Leiterrand drängen. Nur mit einem extremen Aufwand durch die Verwendung vieler Stützstellen bei der Integration kann dieses Problem gelöst werden. Bei Netzfrequenzen ist damit jedoch nicht zu rechnen.

Solche Probleme kennt die Energiemethode auch. Die interne Stromverteilung ist durch die Verwendung der Induktivitäten automatisch einbezogen. Kritisch ist nur die Differenz der Streuinduktivitäten, die zur Kraftberechnung herangezogen wird. Hier kann der in der Numerik bekannte Effekt der Differenz großer Zahlen gleich doppelt auftreten. Solange dies jedoch nicht eintritt, liefert die Energiemethode die genaueren Ergebnisse.

Als Fazit kann festgehalten werden, dass die Kraftberechnung über die Energiemethode besonders bei umfangreichen Modellen aufgrund der geringeren Speicheranforderungen deutliche Vorteile gegenüber der Lorentz-Integration bietet. Bezüglich Genauigkeit und Rechenzeit ist die Energiemethode oft, allerdings nicht immer überlegen. Am Beispiel des schon untersuchten 110-kV-/10-kV-Transformators sollen nun mit der Energiemethode Wicklungskräfte bestimmt werden, da hier die Rechenzeit für die Lorentz-Integration um ein Vielfaches größer wäre.

### 4.3 Kraftberechnung am Beispiel des 110-kV-/10-kV-Transformators

Im Betriebs- wie auch im Kurzschlussfall wirken Kräfte sowohl in radialer als auch in axialer Richtung auf die Wicklungen. Betrachtet werden hier nur Kräfte, die auf die Hin- oder Rückleiter einer Wicklung summarisch eine resultierende Kraft ergeben. Heben sich z.B. Kontraktionskräfte gegeneinander auf, können sie mit der Energiemethode nicht bestimmt werden. Es bleiben damit einerseits die radial wirkenden Normalkräfte sowie andererseits bei asymmetrischer Wicklungsanordnung die parallel zur Spulennachse gerichteten Schubkräfte zu ermitteln.

Für die Kraftberechnung werden die Betriebsströme zu Grunde gelegt. Natürlich sind die Kurzschlusskräfte um ein Vielfaches größer, jedoch gelten immer Abhängigkeiten der Form  $F \sim I^2$ , so dass die Umrechnung auf Kurzschluss-Ströme einfach erfolgen kann. Ist ein Transformator mit einer relativen Kurzschluss-Spannung  $u_k$  die einzige Impedanz im Kurzschlusskreis, so gilt für den Anfangskurzschlusswechselstrom

$$I_k'' \approx \frac{I_{rT}}{u_k}. \quad (4.18)$$

Der für die Kurzschlusskraft maßgebliche Stoßkurzschluss-Strom  $I_s$  bestimmt sich daraus zu maximal

$$I_s = \sqrt{2} \kappa I_k'' \approx 20 \cdot I_{rT}, \quad (4.19)$$

wenn der Stoßfaktor  $\kappa$  mit dem Maximalwert 2 und die relative Kurzschluss-Spannung zu  $u_k = 0,14$  angenommen werden. Damit ergeben sich Kurzschlusskräfte, die um den Faktor 400 größer als die im Betriebsfall auftretenden Beanspruchungen sind.

Bei einem fertiggestellten Transformator ist es nicht möglich, die auf die Wicklungen wirkenden Kräfte experimentell zu bestimmen, denn man benötigt dazu von außen einen Zugriff auf die einzelnen Wicklungen. Dieses ist zwar bei Versuchsausführungen möglich; fabrikfertige Exemplare sind dafür jedoch nicht zu verwenden. Um die mit der Randelementmethode bestimmten Kräfte einzuordnen, können keine Messwerte als Referenzgrößen herangezogen werden. Diese sind auf eine andere Weise zu bestimmen.

#### 4.3.1 Bestimmung von Referenzwerten

Für eine Berechnung der in einem Transformator wirkenden Kräfte benötigt man die Felder und Ströme in allen Leitern, die dann gemäß Gleichung (4.2) integriert werden. Es hat sich gezeigt, dass man mit einfachen Annahmen und einer auf der Methode von Rogowski, vgl. [1], basierenden Feldberechnung für standardisierte Geometrien die Kräfte relativ genau bestimmen kann.

In [22] werden auf diese Weise die Normal- und die Schubkräfte auf Transformatorenwicklungen bestimmt. Dabei wird von einem Zweiwicklungstransformator ausgegangen, dessen primäre und sekundäre Wicklungen eine identische Höhe  $h$  aufweisen. Weiterhin relevant ist der Abstand  $g$  der innenliegenden Wicklung zum Eisenkern sowie die gesamte Breite  $a$  beider Wicklungen inklusive ihres Zwischenraumes. Zusätzlich wird noch die mittlere Windungslänge  $l$  benötigt. An dieser Stelle wird wiederum die bisher mit Erfolg verwendete

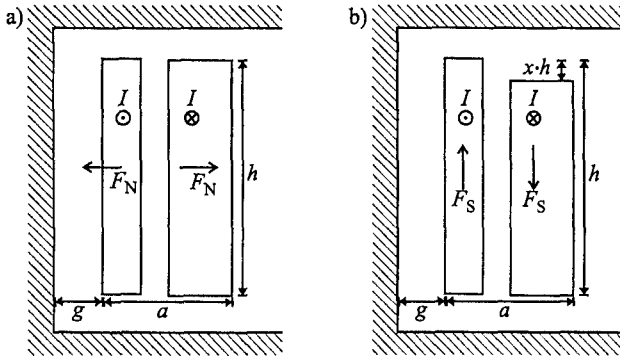


Bild 4.2: Kraftwirkung an einem einfachen Transformatorenmodell: a) Normalkräfte b) Schubkräfte.

energiegewichtete Windungslänge  $l_{eg}$  nach Gleichung (3.35) eingesetzt. Eine schematische Darstellung der zu Grunde gelegten Geometrie bietet die Abbildung 4.2a.

Zur Kraftberechnung nach [22] benötigt man zunächst den in der Literatur als Rogowski-Faktor bekannten Wert

$$K = 1 - \frac{a}{\pi h} \quad (4.20)$$

Bei den hier vorliegenden Geometrien mit  $h \approx 1,5 \text{ m}$  und  $a \approx 0,2 \text{ m}$  gilt

$$\frac{a}{\pi h} \ll 1, \quad (4.21)$$

so dass auf eine weitere Reihenentwicklung von  $K$  verzichtet werden kann. Die Normalkraft berechnet sich dann zu

$$F_N = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{l_{eg} \cdot K}{h} (w_1 \cdot I_1)^2, \quad (4.22)$$

mit der primärseitigen Windungszahl  $w_1$  sowie dem Strom  $I_1$  der Primärwicklung. Wählt man die energiegewichtete Länge des 110-kV-/10-kV-Transformators nach Tabelle 3.4, so ergibt sich eine Normalkraft  $F_N$  von

$$F_N = 34,99 \text{ kN} \quad (4.23)$$

auf die Wicklungen, wobei die Kraft immer von der anderen Wicklung weggerichtet ist. Dieses wird von den sich jeweils abstoßenden Feldern gegenseitig stromdurchflossener Leiter verursacht. Dementsprechend wirkt bei asymmetrischen Geometrien wie in Abbildung 4.2b eine axiale Kraft stets so auf die Wicklungen, dass sich die Asymmetrien verstärken. Nach [22] berechnet man diese Schubkraft zu

$$F_S = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{l_{eg} \cdot x}{n \cdot \frac{h}{\pi} + n^2 \left( \frac{a}{2} + g \right)} (w_1 \cdot I_1)^2. \quad (4.24)$$

Der Faktor  $x$  als Maß der relativen Verkürzung der äußeren Wicklung sowie die Anzahl der sogenannten Querstreugruppen  $n$  gehen hier zusätzlich in die Rechnung ein. In der Bezeichnung Querstreueung spiegelt sich die Tatsache wider, dass die axialen Kräfte im Gegensatz zu den radialen Wicklungskräften von Streufeldern verursacht werden, die senkrecht zu dem Hauptstreu Feld verlaufen. Diese Felder bezeichnet man summarisch als Quersfelder, die auch schon beim 63-MVA-Doppelstock-Transformator auf Seite 69 bei den Kurzschlussversuchen 2 bis 4 eine wesentliche Einflussgröße dargestellt haben. Bei der hier vorliegenden Geometrie mit einer Primärspule, die sowohl oben als auch unten kürzer als die sekundäre Wicklung ist, gilt  $n = 2$ . Natürlich beschreibt die verwendete Geometrie den realen Transformator nicht exakt, so dass die hier berechneten Schubkräfte ungenau sein können. Für den untersuchten 110-kV-/10-kV-Transformator beträgt die Schubkraft

$$F_S = 638 \text{ N.} \quad (4.25)$$

Anschließend sollen die berechneten Referenzwerte für die Normalkraft  $F_N$  und die Schubkraft  $F_S$  mit den Kräften verglichen werden, die sich aus der numerischen Feldberechnung mit der Randelementmethode ergeben.

#### 4.3.2 Ermittlung der Kräfte mit der Randelementmethode

Als Beispiel für die Kraftberechnung mit der Randelementmethode wird der von der Streuinduktivitätsberechnung her bekannte 110-kV-/10-kV-Transformator verwendet. Er weist eine Geometrie auf, die der in [22] vorausgesetzten am ehesten entspricht. Weiterhin sind detaillierte einphasige Modellierungen mit den zur Verfügung stehenden Rechnerressourcen berechenbar.

Alle Kräfte sind mit Verschiebungen von  $\Delta x = \pm 0,001 \text{ m}$  an einphasigen Modellen bestimmt worden, wobei immer die Ergebnisse der beiden Rechnungen für die positive wie negative Verschiebung gemittelt worden sind. Eine Untersuchung über die richtige Wahl der Verschiebung wird im Abschnitt 4.3.3 vorgenommen. Die Frequenz, bei der die Rechnungen durchgeführt worden sind, ist weiterhin  $f = 50 \text{ Hz}$ . Als mittlere Leiterlänge wird die energiegewichtete Länge  $l_{eg}$  verwendet.

Wie wegen der genauen Ergebnisse der Streuinduktivitätsberechnung zu vermuten ist, können die Normalkräfte mit der Randelementmethode sehr gut bestimmt werden. In beiden Fällen sind es die (Längs-) Streufelder, die das Ergebnis im Wesentlichen beeinflussen. In der Tabelle 4.4 sind die mit der Energiemethode gewonnenen Kräfte dargestellt.

Modell	$F_N$
1	34,31 kN
2	34,34 kN
3	34,32 kN
4	34,31 kN
5	34,36 kN

Tabelle 4.4: Berechnete Normalkräfte  $F_N$  des 110-kV-/10-kV-Transformators.

Da bei den Modellen 1 bis 5 die berechneten Normalkräfte weitestgehend konstant sind, ist auf die umfangreiche Berechnung der beiden feinsten Modelle 6 und 7 verzichtet worden.



Gegenüber dem in Gleichung (4.23) bestimmten Vergleichswert liegen die hier ermittelten Kräfte um 1,9 % niedriger. Angesichts der Tatsache, dass die Geometrie des untersuchten Transformators etwas von der in Abbildung 4.2 dargestellten abweicht – z.B. ist die Oberspannungswicklung um 1,5 % kürzer als die Unterspannungswicklung – stimmen die Resultate erstaunlich gut überein. Bemerkenswert ist vor allem, dass schon mit dem einfachsten Modell das Endergebnis bestimmt werden kann.

Anders ist die Situation bei der Berechnung der Schubkräfte auf die in y-Richtung nicht ganz symmetrisch angeordneten Wicklungen. Wie die Kräfte aus der Tabelle 4.5 zeigen, liegt hier keine Konvergenz vor und der Referenzwert von  $F_S = 638 \text{ N}$  aus Gleichung (4.25) wird auch nur ungefähr erreicht. Beim feinsten Modell beträgt die Abweichung 26,8 %. Dass beim Modell 6 der Referenzwert fast genau getroffen worden ist, muss deshalb als Zufall angesehen werden.

Modell	$F_S$
1	43 N
2	72 N
3	59 N
4	1004 N
5	958 N
6	630 N
7	809 N

Tabelle 4.5: Berechnete Schubkräfte  $F_S$  des 110-kV-/10-kV-Transformators.

Auffällig sind die extrem geringen Kräfte, die für die Modelle 1 bis 3 berechnet worden sind. In diesen Nachbildungen werden vergleichsweise große Leiter verwendet; die Schubkräfte verursachenden Querfelder sind an den Wicklungsenden nur sehr unzureichend nachgebildet. Bei feineren Modellierungen werden diese Querfelder schon deutlich besser, aber immer noch nicht genau erfasst. Eine Ursache dafür könnte eine nicht so ausgeprägte Führung der Felder durch den Eisenkern sein. Vor allem der Bereich der gekrümmten Felder an den Wicklungsenden kann sich außerhalb der Kernebene von den Verhältnissen innerhalb der Modellebene unterscheiden. Eine zweidimensionale Modellierung wäre in diesem Fall wie bei dem schon untersuchten Doppelstock-Transformator nicht ausreichend.

Als weitere Fehlerquelle darf man darüberhinaus die Numerik nicht außer Acht lassen. Bei der Kraftberechnung mit der Energiemethode werden Differenzen von Streuinduktivitäten gebildet. Da die Streuinduktivitäten selber schon als Differenz großer Zahlen angesehen werden müssen, ist es fraglich, wieviele Stellen bei der Differenz zweier fast identischer Streuinduktivitäten noch verwendet werden dürfen. Bei der Berechnung der Normalkräfte  $F_N$  hat sich zumindest eine Genauigkeit von 100 N herausgestellt. Dieser Wert könnte auch hier die Genauigkeitsgrenze markieren.

#### 4.3.3 Einfluss der Wahl der Verschiebung auf die berechneten Kräfte

Als wesentlicher Parameter beeinflusst die Größe der Verschiebung die Ergebnisse der Kraftberechnung mit der Energiemethode. Dabei sind zwei Aspekte zu beachten, die sich bezüglich ihrer Optimierung widersprechen. Zum einen sollte die Verschiebung so klein wie möglich

sein, weil die Kraft aus einem Differenzenquotienten bestimmt wird, der eine echte Differenziation approximieren soll. Dieses gelingt bei möglichst kleinen Schrittweiten im Allgemeinen am besten.

Andererseits verursacht eine zu kleine Verschiebung möglicherweise nur eine zu kleine Veränderung in den betrachteten Induktivitäten, so dass das Ergebnis numerisch nicht mehr zuverlässig ist. Um diese Effekte gegeneinander abwägen zu können, sind bei verschiedenen Verschiebungen die Schubkräfte auf die Wicklungen verglichen worden. Die Kräfte an sich sind zwar – wie im Abschnitt 4.3.2 dargelegt – nicht genau; jedoch kann ihr Konvergenzverhalten untersucht werden. In der Tabelle 4.6 sind die berechneten Kräfte für drei Modelle bei vier verschiedenen Verschiebungen aufgeführt.

Modell	Verschiebung $\Delta x = \pm 0,001 \text{ m}$	Verschiebung $\Delta x = \pm 0,01 \text{ m}$	Verschiebung $\Delta x = \pm 0,02 \text{ m}$	Verschiebung $\Delta x = \pm 0,03 \text{ m}$
1	43 N	42 N	41 N	37 N
2	72 N	73 N	71 N	68 N
3	59 N	61 N	59 N	56 N

Tabelle 4.6: Konvergenz der mit der Energiemethode bestimmten Kräfte bei unterschiedlichen Verschiebungen.

Eindeutig zu erkennen ist die Abnahme der berechneten Kraft bei zu großen Verschiebungen. Dieser Effekt tritt auf, wenn die Ableitung der magnetischen Energie nach der Verschiebung bei größeren Verschiebungen geringer wird. Es wird dann mit dem Differenzenquotienten der Mittelwert über einen zu großen Bereich gebildet. Andererseits zeigen die nur geringfügigen Änderungen in den berechneten Kräften bei Verschiebungen zwischen  $\Delta x = \pm 0,001 \text{ m}$  und  $\Delta x = \pm 0,02 \text{ m}$ , dass die Wahl der Verschiebung das Ergebnis nur relativ gering beeinflusst. Weiterhin wird deutlich, dass die mit einer Verschiebung von  $\Delta x = \pm 0,001 \text{ m}$  berechneten Kräfte bei einer zehnfach größeren Verschiebung  $\Delta x = \pm 0,01 \text{ m}$  fast identisch reproduziert werden. Daraus lässt sich schließen, dass die numerischen Ungenauigkeiten in diesem Fall noch nicht relevant sind, denn sonst hätten sich die Ergebnisse stärker unterscheiden müssen. Festzuhalten bleibt als Ergebnis, dass die Größe der Verschiebung in gewissen Grenzen beliebig gewählt werden kann. In der Praxis haben sich dabei Verschiebungen von  $\Delta x = \pm 0,001 \text{ m}$  bis  $\Delta x = \pm 0,01 \text{ m}$  als brauchbar erwiesen.

Nachdem mit der Kraftberechnung als Anwendung die Streuinduktivitätsberechnung an Leistungstransformatoren abgeschlossen ist, sollen durch eine Verknüpfung von Feld- und Netzberechnung kapazitive Kopplungen berücksichtigt werden, um abschließend die Frequenzgänge von Transformatoren sowie die bei höheren Frequenzen auftretenden Eigenformen in den Wicklungsströmen zu berechnen.

## 5 Ermittlung der Frequenzgänge und Eigenformen von Leistungstransformatoren

Bislang sind in dieser Arbeit allein die induktiven Kopplungen zwischen Leitern eines zweidimensionalen Modells betrachtet worden. Darauf basierend konnten Streu- und Nullinduktivitäten, Kurzschlussverluste und Wicklungskräfte von Leistungstransformatoren numerisch bestimmt werden. An dieser Stelle soll nun das Modell um kapazitive Kopplungen erweitert werden. Die eigentliche Feldberechnung bleibt dabei in ihrer bisherigen Form erhalten. Allerdings bilden die so berechneten induktiven Spannungsabfälle entlang der Windungen jetzt die Grundlage für eine Netzberechnung, in der zusätzlich Kapazitäten zwischen den Windungen zu berücksichtigen sind.

Dabei werden die Kapazitäten der Windungen als gegebene Größen angenommen, die z.B. aus einer elektrostatischen Feldberechnung stammen können oder als Messwerte vorliegen. Ein Verteilungsalgorithmus ordnet jeder Windung einen entsprechenden Anteil der Kapazitäten zu. Diese Vorgehensweise ist dadurch gerechtfertigt, dass an real existierenden Transformatoren zwar summarische Kapazitätsmessungen zwischen zwei Windungen oder einer Windung und der Erde durchführbar sind, jedoch die kapazitiven Kopplungen zwischen den einzelnen Windungen zweier Windungen nicht bekannt sind.

Nimmt man realistische Kapazitäten zu den mit der Randlelementmethode berechneten induktiven Kopplungen hinzu, so erhält man ein System von induktiv und kapazitiv gekoppelten Leitern. Aus der Lösung des zugehörigen Gleichungssystems können z.B. die lokale Stromverteilung innerhalb einer Windung oder bei Variation der Frequenz der Frequenzgang eines Leistungstransformators berechnet werden. Dabei kann man mit der Berechnung in Frequenzbereiche vordringen, die messtechnisch bisher nur äußerst schwierig zu erfassen gewesen sind. Ob das verwendete Modell dann jedoch noch ausreichend genau für konkrete Aussagen ist, bleibt bis zur Verifizierung durch Messwerte offen. Es ist jedoch zu vermuten, dass die Rechnungen zumindest Tendenzen für das tatsächliche Verhalten von Leistungstransformatoren bei hohen Frequenzen aufzeigen. Dabei ist auch zu beachten, dass aufgrund des hohen Rechenaufwandes die Untersuchung auf einphasige Modelle beschränkt bleibt.

Zunächst soll durch die Verknüpfung einer Netzberechnung mit der bisher verwendeten zweidimensionalen Feldberechnung das Gleichungssystem (2.88) erweitert werden. Dazu müssen die Windungen durch Knotenpunkte miteinander verbunden werden.

### 5.1 Verknüpfung von Feldberechnung und Netzberechnung

Es ist das Ziel dieses Abschnitts, die bestimmten Induktivitäten mit realistischen Kapazitäten zu koppeln, um so ein vollständiges Abbild der elektrischen Ströme in Leistungstransformatoren zu erhalten. Hierbei ist vor allem das Verhalten bei höheren Frequenzen interessant, denn bei einer Netzfrequenz von  $f = 50$  Hz spielen die Kapazitäten infolge ihrer hohen Impedanz keine Rolle.

Ausgegangen wird von einem ebenen Transformatormodell mit  $n$  nachgebildeten Leitern, von denen einer den Eisenkern darstellt. Üblicherweise ist die Anzahl der Tore des aufzustellenden Netzwerks identisch mit der Anzahl der Windungen und werde hier mit  $t$  gekennzeichnet. Eine Sonderrolle nimmt an dieser Stelle der Eisenkern ein, der kein Tor im eigentlichen Sinne darstellt, aber auch nicht mit dem Rest des Netzwerks verbunden ist. Es

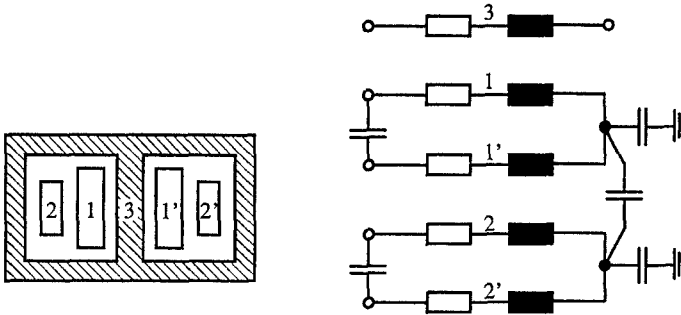


Bild 5.1: Einfaches Beispiel für die Verknüpfung von Feld- und Netzberechnung. 1,1': Primärwicklung, 2,2': Sekundärwicklung, 3: Eisenkern.

muss nur sichergestellt sein, dass kein Strom durch den Eisenkern in Richtung der  $z$ -Achse fließen kann. Um die ebenen Leiter mit Kapazitäten zu verbinden, müssen Knotenpunkte definiert sein. Ihre Zahl  $m$  ist abhängig von der Verschaltung der Windungen in den einzelnen Wicklungen. Schließlich bezeichne  $k$  die Anzahl der im System vorhandenen Kapazitäten.

Für einen einphasigen Zweiwicklungstransformator ist die Verschaltung in der Abbildung 5.1 schematisch dargestellt. Das einfache Modell enthält für Ober- und Unterspannung je nur eine Windung, die Leiterzahl beträgt damit  $n = 5$ . Beide zu einer Windung gehörenden Leiter sind auf der einen Seite verbunden, während sich am anderen Ende die Torknoten befinden. Bei  $t = 2$  Toren ergeben sich insgesamt  $m = 8$  Knoten. In das Netzwerk sind je zwei Erd- und Windungskapazitäten sowie eine Koppelkapazität zusätzlich zu den aus der Feldberechnung stammenden Induktivitäten und ohmschen Widerständen eingetragen; somit folgt  $k = 5$ . In diesem Modell bleibt der Eisenkern ohne galvanische Kopplung zu den Leitern, um seine Stromlosigkeit zu gewährleisten. Deshalb müssen die Erdkapazitäten zwischen den Wicklungen und Schenkel oder Joch zu einem zusätzlichen Erdknoten geführt werden.

Es stellt sich nun die Aufgabe, die durch die Verknüpfung mit einer Netzberechnung zusätzlich entstandenen physikalischen Größen in das lineare Gleichungssystem der Feldberechnung (2.88) zu integrieren.

### 5.1.1 Erweiterung des Gleichungssystems der Feldberechnung

Bei einer Netzberechnung ergeben sich alle Ströme und Spannungen innerhalb des Netzwerks aus den eingepprägten Größen an den Toren. Dazu müssen die Impedanzen aller Netzwerkelemente bekannt sein. Hier stammen die Induktivitäten und ohmschen Widerstände aus einer Feldberechnung, während die Kapazitäten vorgegeben werden. Zunächst sollen jedoch alle in diesem Transformatormodell auftretenden Netzwerkgrößen angegeben werden.

Wie schon bei der Feldberechnung sind die Ströme in den  $n$  modellierten Leitern zu betrachten. Sie bilden den Vektor

$$[I_L] = (I_1, I_2, \dots, I_n). \quad (5.1)$$

Im Gegensatz zur Feldberechnung sind die Leiterströme in der Netzberechnung Unbekannte.

Weiterhin sind die Ströme durch die  $k$  Kapazitäten zu berechnen, die den Vektor

$$[\underline{I}_C] = (\underline{I}_{C,1}, \underline{I}_{C,2}, \dots, \underline{I}_{C,k}) \quad (5.2)$$

bilden. Zusätzlich benötigt man die Potentiale an jedem der  $m$  Knoten

$$[\underline{\phi}] = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m) \quad (5.3)$$

An den  $t$  Toren sind die Ströme durch

$$[\underline{I}_T] = (\underline{I}_{T,1}, \underline{I}_{T,2}, \dots, \underline{I}_{T,t}) \quad (5.4)$$

sowie die Spannungen durch

$$[\underline{U}_T] = (\underline{U}_{T,1}, \underline{U}_{T,2}, \dots, \underline{U}_{T,t}), \quad (5.5)$$

gegeben. Bei Kenntnis aller Vektoren (5.1) bis (5.5) ist das Netzproblem vollständig gelöst. Als eingeprägte Größen sollen für jedes Tor ein Strom oder eine Spannung bekannt sein. Im Folgenden stellt sich die Aufgabe, die Vektoren (5.1) bis (5.5) durch Aufstellen der Maschen- und Knotengleichungen miteinander zu verknüpfen. Dabei werden alle Gleichungen in Matrixform angegeben, weil sie sich so am Besten in das Lösungsverfahren des Feldproblems integrieren lassen.

Zuerst sollen die  $m$  Knotengleichungen aufgestellt werden. Dazu werden alle Leiter-, Tor- oder kapazitiven Ströme, die in einen Knoten hineinfließen, positiv, alle herausfließenden negativ gezählt. Dieses kann man mit drei Inzidenzmatrizen als Matrixgleichung formulieren. Es stellt

$$[Q^L]_{i=1,m;\nu=1,n} = \begin{cases} 1, & \text{wenn der Leiterstrom } \underline{I}_{L,\nu} \text{ in den Knoten } i \text{ hineinfließt} \\ -1, & \text{wenn der Leiterstrom } \underline{I}_{L,\nu} \text{ aus dem Knoten } i \text{ herausfließt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.6)$$

die Verschaltung der Leiter,

$$[Q^C]_{i=1,m;\nu=1,k} = \begin{cases} 1, & \text{wenn der kapazitive Strom } \underline{I}_{C,\nu} \text{ in den Knoten } i \\ & \text{hineinfließt} \\ -1, & \text{wenn der kapazitive Strom } \underline{I}_{C,\nu} \text{ aus dem Knoten } i \\ & \text{herausfließt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.7)$$

die der Kapazitäten und

$$[Q^T]_{i=1,m;\nu=1,t} = \begin{cases} 1, & \text{wenn der Torstrom } \underline{I}_{T,\nu} \text{ in den Knoten } i \text{ hineinfließt} \\ -1, & \text{wenn der Torstrom } \underline{I}_{T,\nu} \text{ aus dem Knoten } i \text{ herausfließt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.8)$$

die Anordnung der Tore dar. Dabei weist die Matrix  $[Q^L]$  die Dimension  $m \times n$ ,  $[Q^C]$  die Dimension  $m \times k$  und  $[Q^T]$  die Dimension  $m \times t$  auf. Anhand der Matrix  $[Q^L]$  wird der prinzipielle Aufbau der Inzidenzmatrizen näher erläutert. Diese Matrix wird von rechts mit dem Vektor der Leiterströme  $[\underline{I}_L]$  multipliziert, so dass jede Spalte einem Leiterstrom zugeordnet ist. Eine Zeile entspricht dann einem Knoten. In jeder Spalte muss nun das Element mit Eins belegt werden, das dem Knoten zugeordnet ist, in den der entsprechende Leiterstrom hineinfließt. Weiterhin gibt es in jeder Spalte ein Element mit dem Wert -1, das zu dem Knoten mit dem herausfließenden Strom gehört. Alle anderen Elemente einer Spalte sind Null. Insgesamt ergeben sich damit die Knotengleichungen in Matrixform zu

$$[Q^L] \cdot [\underline{I}_L] + [Q^C] \cdot [\underline{I}_C] + [Q^T] \cdot [\underline{I}_T] = [0]. \quad (5.9)$$

Aus den Spannungsabfällen über den Netzwerkelementen ergeben sich die Maschengleichungen. Für jeden Leiter  $\nu$  mit  $1 \leq \nu \leq n$  ist der Spannungsabfall über den Leiter durch

$$l_\nu \cdot \omega \underline{K}_\nu = \underline{\phi}_{\nu 2} - \underline{\phi}_{\nu 1} \quad (5.10)$$

mit der Potentialdifferenz an seinen Enden verknüpft. In dieser Beziehung stellt  $l_\nu$  die Leiterlänge,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\underline{K}_\nu$  die auf die Länge bezogenen Leiterkonstanten dar. Letztere gibt gemäß Gleichung (2.105) den Spannungsabfall entlang des Leiters an und wird zunächst als bekannt vorausgesetzt. Das Potential am Anfang und am Ende des Leiters wird mit  $\underline{\phi}_{\nu 1}$  und  $\underline{\phi}_{\nu 2}$  bezeichnet. Eine Formulierung in Matrixschreibweise benötigt wiederum zwei Inzidenzmatrizen.

Für die linke Seite der Gleichung (5.10) wird die Matrix  $[L^K]$  der Dimension  $n \times n$  verwendet. Damit sich bei Multiplikation mit dem Vektor  $[\underline{K}]$  von rechts  $l_\nu \cdot \omega \underline{K}_\nu$  ergibt, muss die Matrix gemäß

$$[L^K]_{i=1,n;\nu=1,n} = l_\nu \cdot \omega \cdot \delta_{i,\nu} \quad (5.11)$$

besetzt sein. Mit der  $n \times m$ -Matrix  $[L^\phi]$  kann man die Zuordnung zwischen Leitern und Knotenpunkten herstellen. Das Schema der Belegung

$$[L^\phi]_{i=1,n;\nu=1,m} = \begin{cases} -1, & \text{wenn der Knoten } \nu \text{ am Anfang des Leiters } i \text{ liegt} \\ 1, & \text{wenn der Knoten } \nu \text{ am Ende des Leiters } i \text{ liegt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.12)$$

ist dabei ähnlich wie bei der Matrix  $[Q^L]$ . Durch diese beiden Matrizen gelingt es, Gleichung (5.10) in der Matrixform

$$[L^K] \cdot [\underline{K}] + [L^\phi] \cdot [\underline{\phi}] = 0 \quad (5.13)$$

darzustellen. Analog zu den Spannungsabfällen entlang der Leiter werden die Kapazitäten behandelt. Für eine Kapazität  $C_\nu$  mit  $1 \leq \nu \leq k$  ergibt sich die Beziehung

$$\frac{1}{j\omega \cdot C_\nu} \cdot \underline{I}_{C_\nu} = \underline{\phi}_{\nu 2} - \underline{\phi}_{\nu 1}. \quad (5.14)$$

Mit  $\phi_{\nu 1}$  und  $\phi_{\nu 2}$  sind hier wiederum die Potentiale der Knoten bezeichnet, zwischen denen die Kapazität liegt. Die  $k \times k$ -Diagonalmatrix  $[C^C]$  entspricht in Funktion und Aufbau mit

$$[C^C]_{i=1,k;\nu=1,k} = \frac{1}{j\omega \cdot C_{\nu}} \cdot \delta_{i,\nu} \quad (5.15)$$

der Matrix  $[L^K]$ , während die  $k \times m$ -Matrix  $[C^\phi]$  mit  $[L^\phi]$  übereinstimmt. Dementsprechend muss sie die Form

$$[C^\phi]_{i=1,k;\nu=1,m} = \begin{cases} -1, & \text{wenn der Knoten } \nu \text{ am Anfang der Kapazität } i \text{ liegt} \\ 1, & \text{wenn der Knoten } \nu \text{ am Ende der Kapazität } i \text{ liegt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (5.16)$$

annehmen. Zusammengefasst werden die Beziehungen (5.15) dann durch

$$[C^C] \cdot [I_C] + [C^\phi] \cdot [\phi] = 0. \quad (5.17)$$

Mit den Maschen- und Knotengleichungen sind die Abhängigkeiten der Ströme und Spannungen im Netzwerk festgelegt. Zur vollständigen Beschreibung des Netzproblems müssen noch die Torgroßen betrachtet werden. Vorausgesetzt worden ist, dass an jedem Tor entweder der Torstrom oder die Torspannung eingepreßt und damit bekannt sind. Diese eingepreßten Größen sollen im Vektor  $[T]$  dem Gleichungssystem übergeben werden. Abhängig davon, ob Strom oder Spannung am Tor  $i$  mit  $1 \leq i \leq t$  eingepreßt sind, gilt

$$[T]_i = I_{T,i} \quad (5.18)$$

oder

$$[T]_i = \phi_{i1} - \phi_{i2}. \quad (5.19)$$

Wiederum ist mit  $\phi_{i1}$  das Potential am Eingangsknoten und  $\phi_{i2}$  das Potential am Ausgangsknoten des Tores  $i$  bezeichnet. Da sowohl Strom- als auch Spannungseinprägungen zugelassen sind, kann der Vektor  $[T]$  durchaus gemischte Größen enthalten.

Auch an dieser Stelle finden zwei Inzidenzmatrizen Verwendung, die den Vektor  $[T]$  mit den Torströmen  $[I_T]$  und den Knotenpotentialen  $[\phi]$  verknüpfen. Beide Matrizen weisen  $t$  Zeilen auf – für jedes Tor eine. Die Matrix  $[T^T]$  besteht aus  $t$  Spalten und kennzeichnet die Tore, an denen Ströme eingepreßt sind. Daher ist sie gemäß

$$[T^T]_{i=1,t;\nu=1,t} = \begin{cases} \delta_{i,\nu}, & \text{wenn in Tor } i \text{ ein Strom eingepreßt ist} \\ 0, & \text{wenn in Tor } i \text{ eine Spannung eingepreßt ist} \end{cases} \quad (5.20)$$

aufgebaut. Diese Struktur bewirkt immer dann eine Eins auf der Diagonalen, wenn das zugehörige Tor eine Stromeinprägung aufweist. Den  $m$  Knotenpunkten entspricht die Anzahl der Spalten in der Matrix  $[T^\phi]$ . Wie auch für die Matrizen  $[L^\phi]$  und  $[C^\phi]$  gilt

$$[T^\phi]_{i=1,t;\nu=1,m} = \begin{cases} 1, & \text{wenn der Knoten } \nu \text{ der Eingangsknoten des Tores } i \\ & \text{und in das Tor } i \text{ eine Spannung eingepreßt ist} \\ -1, & \text{wenn der Knoten } \nu \text{ der Ausgangsknoten des Tores } i \\ & \text{und in das Tor } i \text{ eine Spannung eingepreßt ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (5.21)$$

wobei jedoch nur Zeilen mit einer Spannungseinprägung im entsprechenden Tor belegt sind. Durch

$$[T^T] \cdot [\underline{L}_T] + [T^\phi] \cdot [\phi] = [\underline{T}] \quad (5.22)$$

werden die eingepprägten Torgrößen mit den weiteren Netzgrößen verknüpft. Mit der Beziehung (5.22) ist das Netzproblem vollständig. Jedoch werden bislang nur Potentialdifferenzen betrachtet. In jedem Netz ist aber mindestens ein Potential frei wählbar, z.B. wird das Erdpotential meist auf Null festgelegt. In diesem Fall kann

$$[\underline{P}] = (0, 0, \dots, 0) \quad (5.23)$$

gewählt werden. Durch eine Matrixgleichung

$$[Q^\phi] \cdot [\phi] = [\underline{P}]. \quad (5.24)$$

werden die gewählten freien Potentiale den entsprechenden Knoten zugewiesen. Dafür wird eine  $m \times m$ -Matrix  $[Q^\phi]$  benötigt, die auf der Diagonalen gemäß

$$[Q^\phi]_{\iota=1,m;\nu=1,m} = \begin{cases} \delta_{\iota,\nu}, & \text{wenn das Potential des Knotenpunktes } \iota \\ & \text{frei wählbar ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.25)$$

eine Eins enthält, wenn der entsprechende Knotenpunkt ein Potential zugewiesen bekommen soll. Dann wird aus Gleichung (5.24)

$$\phi_\iota = [\underline{P}]_\iota. \quad (5.26)$$

Alle anderen Zeilen aus (5.24) ergeben nur  $0 = 0$ .

Mit den Unbekannten  $[\underline{L}_L]$ ,  $[\underline{L}_C]$ ,  $[\underline{L}_T]$  und  $[\phi]$  sind in der Netzberechnung  $n + k + t + m$  Größen zu bestimmen. Dem stehen aus Gleichung (5.13)  $n$ , aus Gleichung (5.17)  $k$ , aus Gleichung (5.22)  $t$  sowie aus der Gleichung (5.9)  $m$  zusätzliche Beziehungen gegenüber, in der Summe also wiederum  $n + k + t + m$ . Hinzukommt noch eine geringe Anzahl – meist nur eine Gleichung – aus der Beziehung (5.24). Da diese Matrixbeziehung im Allgemeinen viel mehr Zeilen als Gleichungen enthält, bietet es sich an, die Matrizen (5.9) und (5.24) durch Addition zu einer Gleichung

$$[Q^L] \cdot [\underline{L}_L] + [Q^C] \cdot [\underline{L}_C] + [Q^T] \cdot [\underline{L}_T] + [Q^\phi] \cdot [\phi] = [\underline{P}] \quad (5.27)$$

zusammenzufassen.

Mit Hilfe der bisher beschriebenen Gleichungen ist es möglich, dass Netzproblem vollständig zu lösen, wenn – wie oben angenommen – die Spannungsabfälle entlang der Leiter  $[\underline{K}]$  bekannt sind. Da diese jedoch aus einer Feldberechnung stammen, die wiederum die Leiterströme benötigt, können Netz- und Feldproblem nicht vollständig entkoppelt werden. Man kann jedoch auf einfache Weise ein gemeinsames Gleichungssystem aufstellen, indem man



im Gleichungssystem (2.88) den Vektor der Leiterströme  $[\underline{I}_L]$  zu einer Unbekannten macht. Dazu betrachtet man die letzte Zeile des Gleichungssystems (2.88)

$$[\lambda^L] \cdot [\partial \underline{A}] = -[\mu \underline{I}]. \quad (5.28)$$

Gemäß Gleichung (2.98) besteht der Matrixblock  $[\mu \underline{I}]$  jedoch nur aus Diagonalelementen  $\mu_0 \cdot \underline{I}_\nu$  mit  $1 \leq \nu \leq n$ . Mit der Diagonalmatrix  $[\mu_0]$ , die nur die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  auf der Diagonalen enthält, kann man dann für die Gleichung (5.28) auch

$$[\lambda^L] \cdot [\partial \underline{A}] + [\mu_0] \cdot [\underline{I}_L] = [0] \quad (5.29)$$

schreiben. So gelangen die unbekannten Leiterströme aus der Inhomogenität des Gleichungssystems (2.88) in den Lösungsvektor. Fasst man alle Gleichungen zusammen, so ergibt sich das erweiterte lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} [I\partial G^L] & -[IG^L] & [S^L] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [I\partial G^0] & -[IG^0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\lambda^L] & [0] & [\mu_0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [L^K] & [0] & [0] & [0] & [L^\phi] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [C^C] & [0] & [C^\phi] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [T^T] & [T^\phi] \\ [0] & [0] & [0] & [K^L] & [K^C] & [K^T] & [K^\phi] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\underline{A}] \\ [\partial \underline{A}] \\ [\underline{K}] \\ [\underline{I}_L] \\ [\underline{I}_C] \\ [\underline{I}_T] \\ [\underline{\phi}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [\underline{T}] \\ [\underline{P}] \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

das die ebene Feldberechnung mit einer Netzberechnung kombiniert. Als freie Parameter sind dabei nur die eingepprägten Torgroößen im Vektor  $[\underline{T}]$  zu betrachten. Die unabhängigen Potentiale im Vektor  $[\underline{P}]$  haben keinen Einfluss auf das Ergebnis und können mit Null belegt werden.

Für das Folgende ist von Bedeutung, dass bei der Lösung des Gleichungssystems (5.30) mit dem Gauß-Algorithmus das ohmsche Gesetz für die Leiter entsteht. Im dritten Bearbeitungsschritt nimmt das Gleichungssystem zwischenzeitlich die Gestalt

$$\begin{pmatrix} [*] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [*] & [*] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\underline{Y}] & [\mu_0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [L^K] & [0] & [0] & [0] & [L^\phi] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [C^C] & [0] & [C^\phi] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [T^T] & [T^\phi] \\ [0] & [0] & [0] & [K^L] & [K^C] & [K^T] & [K^\phi] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\underline{A}] \\ [\partial \underline{A}] \\ [\underline{K}] \\ [\underline{I}_L] \\ [\underline{I}_C] \\ [\underline{I}_T] \\ [\underline{\phi}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [\underline{T}] \\ [\underline{P}] \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

an. Dann kann die dritte Zeile

$$[\underline{Y}] \cdot [\underline{K}] + [\mu_0] \cdot [\underline{I}_L] = 0 \quad (5.32)$$

auch als

$$[\underline{K}] = -[\underline{Y}]^{-1} \cdot [\mu_0] \cdot [\underline{I}_L] \quad (5.33)$$

geschrieben werden, da  $[Y]$  immer invertierbar ist, wie die Praxis zeigt. Wäre das nicht der Fall, brähe der Gauß-Algorithmus an dieser Stelle ab. So stellt die Beziehung (5.33) den Zusammenhang zwischen den Spannungsabfällen entlang der Leiter  $[K]$  und den Leiterströmen  $[I_L]$  in einer Impedanzform dar.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass die eben beschriebene Netzberechnung zu größeren Gleichungssystemen als die Feldberechnung führt. Dabei muss zusätzlich noch auf eine vorhandene Symmetrie verzichtet werden, weil die dafür nötige symmetrische Stromeinprägung bedingt durch die Kapazitäten im Allgemeinen nicht mehr gegeben ist. Ein System aus 10000 Leitern, die aus je 4 Randlelementen bestehen, erzeugt so für  $[A]$  und  $[\partial A]$  je 40000 und für  $[K]$  und  $[I_L]$  je 10000 Unbekannte. Die Anzahl der Tore ist bei einem dreiphasigen Zwe Wicklungstransformator 6 und damit vernachlässigbar gering. Jedoch dürfte die Zahl der Kapazitäten und der Knotenpunkte etwa der Zahl der Leiter entsprechen. Mit rund 120000 Gleichungen ist das Gleichungssystem (5.30) damit deutlich größer als das der entsprechenden Feldberechnung.

Für die Berechnung von Frequenzgängen stellt diese große Anzahl an Gleichungen ein Problem dar, da hierfür üblicherweise sehr viele Gleichungssysteme für verschiedene Frequenzen gelöst werden müssen. Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, wird im Folgenden beschrieben, wie man durch Interpolation der Impedanzmatrix der Leiter das Problem der großen Gleichungssysteme umgehen kann.

## 5.2 Ersetzung der Feldberechnung durch interpolierte Daten

Im vorangegangenen Abschnitt ist die Größe der Gleichungssysteme abgeschätzt worden, die sich bei der Verknüpfung von Feld- und Netzberechnung ergeben. Diese Gleichungssysteme sind so groß, dass man sie derzeit nicht in der Vielzahl lösen kann, wie man für einen Frequenzgang benötigt. Wenn man die Feldberechnung als gegeben betrachten kann, reduziert sich die Anzahl der Gleichungen auf ungefähr  $\frac{1}{3}$ , und die Rechenzeit, die etwa kubisch mit der Gleichungszahl verknüpft ist, beträgt nur noch etwa 4 % des Ausgangswertes. Hinzukommt noch ein weiterer Zeitvorteil, weil die Netzberechnung verhältnismäßig viele Nullblöcke enthält.

Ein vollständiger Verzicht auf die Feldberechnung ist angesichts der ausgeprägten Frequenzabhängigkeit der induktiven Kopplungen nicht möglich, vergleiche dazu auch die Abbildungen 3.3 und 3.5. Jedoch gestattet der glatte Verlauf der Frequenzgänge  $L(\omega)$  und  $R(\omega)$ , nur einige Stützstellen zu berechnen und die fehlenden Werte durch eine Spline-Interpolation zu bestimmen. Daher wird die Matrix  $[Y]$  aus Gleichung (5.33), die alle induktiven Kopplungen enthält, für jede der ausgewählten Stützstellen gespeichert; anschließend werden Real- und Imaginärteil einzeln für jedes Matrixelement durch einen kubischen Spline nach [22] interpoliert. Für die Berechnung der Spline-Funktion speichert man die benötigten Koeffizienten. Sollen Frequenzgänge berechnet werden, können aus den gespeicherten Koeffizienten die für die Lösung der Gleichungssystems (5.30) benötigten Werte für jede Frequenz beliebig oft interpoliert werden. Die Details der Interpolation werden im folgenden Abschnitt erläutert.

### 5.2.1 Kubische Spline-Interpolation

Aufgrund der glatten Verläufe der zu interpolierenden Funktionen, wie sie z.B. an den Abbildungen 3.3 und 3.5 zu erkennen sind, können sowohl quadratische als auch kubische

Spline-Interpolationen angewendet werden. Insgesamt haben sich jedoch bei einer kubischen Interpolation die zuverlässigsten Reproduktionen der Ausgangskurven ergeben; weitere Ausführungen sind [23] zu entnehmen. Auf einige Modifikationen wird im Folgenden eingegangen.

Gegeben sind für die Interpolation  $n > 2$  Kreisfrequenzen  $\omega_1 < \dots < \omega_n$  mit den zugehörigen Funktionswerten  $f(\omega_k) = y_k$  für  $1 \leq k \leq n$ . Da die Frequenzgänge nur in logarithmischer Darstellung mit äquidistanten Stützstellen versehen werden können, werden kubische Polynome in  $\log \omega$  der Form

$$s_k(\log \omega) = A_k + B_k \cdot (\log \omega - \log \omega_k) + C_k \cdot (\log \omega - \log \omega_k)^2 + D_k \cdot (\log \omega - \log \omega_k)^3 \quad (5.34)$$

gesucht. Dabei soll einerseits

$$s_k(\log \omega_k) = y_k \quad (5.35)$$

gelten, andererseits sollen sich die Splines zweimal stetig differenzierbar aneinanderfügen. Aus diesen Bedingungen ergibt sich zum einen direkt

$$A_k = y_k, \quad (5.36)$$

zum anderen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & (\log \omega_k - \log \omega_{k-1}) \cdot C_{k-1} + 2 \cdot (\log \omega_{k+1} - \log \omega_{k-1}) \cdot C_k + (\log \omega_{k+1} - \log \omega_k) \cdot C_{k+1} \\ & = 3 \cdot \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{\log \omega_{k+1} - \log \omega_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{\log \omega_k - \log \omega_{k-1}} \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

für  $2 \leq k \leq n-1$ . Zur vollständigen Bestimmung der  $n$  Koeffizienten  $C_k$  reichen die  $n-2$  Gleichungen (5.37) jedoch nicht aus. Die beiden fehlenden Gleichungen erhält man, indem man die zweiten Ableitungen der Splines an der ersten und der letzten Stützstelle vorgibt, an denen ja keine zwei Splines  $s_k$  zusammengefügt werden. Als Krümmung am Anfang und am Ende bietet es sich an, jene zu wählen, die von einer Parabel durch die ersten bzw. letzten drei Punkte festgelegt wird.

Nach der Lösung des Gleichungssystems (5.37) müssen nur die berechneten Koeffizienten  $A_k$  und  $C_k$  gespeichert werden, weil die noch fehlenden Koeffizienten  $B_k$  und  $D_k$  sich gemäß

$$B_k = \frac{A_{k+1} - A_k}{\log \omega_{k+1} - \log \omega_k} - \frac{\log \omega_{k+1} - \log \omega_k}{3} \cdot (2 \cdot C_k + C_{k+1}) \quad (5.38)$$

$$D_k = \frac{C_{k+1} - C_k}{3 \cdot (\log \omega_{k+1} - \log \omega_k)} \quad (5.39)$$

berechnen lassen. Dieses braucht jedoch erst bei der Auswertung der Interpolation zu geschehen. In den Abbildungen 5.2 und 5.3 sind die schon aus den Abbildungen 3.3 und 3.5 bekannten Frequenzgänge der Selbstinduktivität und des ohmschen Widerstandes der Oberspannungswicklung des Transformators aus Abbildung 3.4 noch einmal dargestellt. Ergänzt worden sind die Abbildungen durch die mit kubischen Splines interpolierten Verläufe.

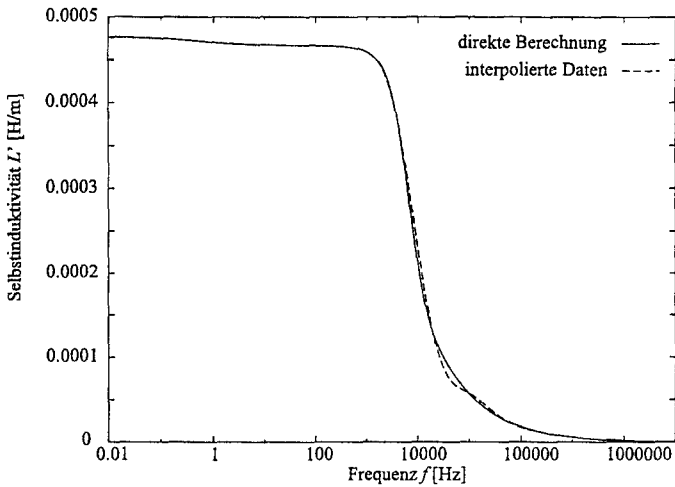


Bild 5.2: Vergleich zwischen der direkt berechneten Selbstinduktivität der Oberspannungswicklung des Transformators aus Abbildung 3.4 und interpolierten Daten.

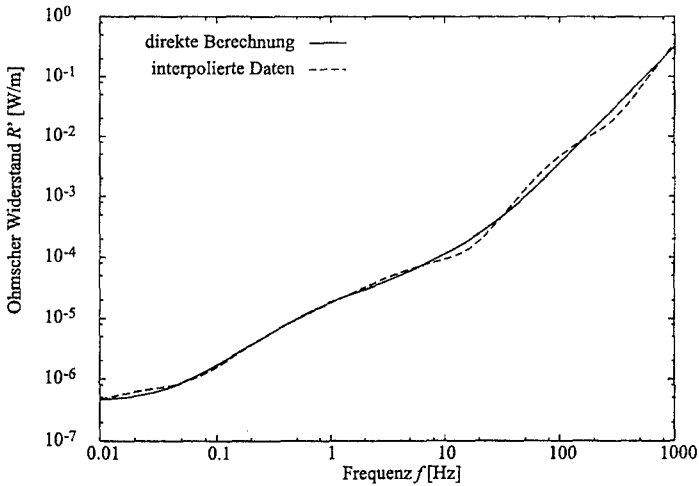


Bild 5.3: Vergleich zwischen dem direkt berechneten ohmschen Widerstand der Oberspannungswicklung des Transformators aus Abbildung 3.4 und interpolierten Daten.

Als Grundlage für die Interpolation sind in logarithmischer Darstellung äquidistante Stützstellen verwendet worden, die sich jeweils um den Faktor fünf in der Frequenz unterscheiden haben. Diese Frequenzen sind als Schnittpunkte zwischen den direkt bestimmten Frequenzgängen und den aus den Splines berechneten zu erkennen. Vergleicht man die interpolierten Kurven mit den Ausgangsdaten, so fällt auf, dass die charakteristischen Krümmungen weitestgehend erhalten bleiben. Bei den berechneten Induktivitäten gibt es erkennbare Abweichungen nur in dem Frequenzbereich, in dem die Selbstinduktivität stark absinkt. Dagegen oszilliert zwar die Kurve der interpolierten Widerstände um die Ausgangsdaten, jedoch bleibt die relative Amplitude dieser Schwingungen über den gesamten Frequenzbereich klein. Damit ist die Anwendbarkeit der Interpolation durch kubische Spline-Funktionen gezeigt.

Es müssen für jede zu interpolierende Funktion zwei Koeffizienten pro Stützstelle gesichert werden. Bei 5000 Leitern enthält die quadratische Kopplungsmatrix  $5000^2 = 2,5 \cdot 10^7$  komplexe Elemente. Zu interpolieren sind also  $5 \cdot 10^7$  Funktionen. Mit den verfügbaren Rechnern kann dieses jedoch in relativ kurzer Zeit geschehen. Für zehn Stützstellen sind pro Funktion 20 Koeffizienten zu speichern, insgesamt also  $10^9$ . Da jeder Koeffizient 8 Byte beansprucht, werden knapp 8 GB Festplattenspeicher benötigt. Dieser Platzbedarf kann derzeit dauerhaft zur Verfügung gestellt werden. Man erreicht damit Einsparungen in der Rechenzeit, die anschließend beim Vergleich zwischen Frequenzgängen mit und ohne Interpolation beschrieben werden.

### 5.2.2 Vergleich zwischen Frequenzgängen mit und ohne Interpolation der induktiven Kopplungen

Als Beispiel wird anhand des Modells 1 des schon im Rahmen der Streuinduktivitätsbestimmung betrachteten 110-kV-/10-kV-Transformators untersucht, ob Frequenzgänge mit interpolierten Feldberechnungen bestimmt werden können. Das verwendete Modell ist klein genug, um einen Frequenzgang über 10 Größenordnungen mit über 2300 berechneten Punkten auch noch mit einer vollständigen Feldberechnung durchzuführen. Ein Ausschnitt aus diesem Frequenzgang ist in den Abbildungen 5.4 und 5.5 dargestellt. Getrennt nach Betrag und Phase wird in diesen Abbildungen die überspannungsseitige Toradmittanz  $Y_{11}$  für eine direkte und eine Berechnung mit interpolierten Daten verglichen. Insgesamt sind 1635 Erd-, Koppel-, Scheiben- und Lagenkapazitäten in diesem Modell enthalten. Auf die Details der Verteilung wird im nachfolgenden Abschnitt näher eingegangen.

Deutlich zu erkennen ist, dass der mit interpolierten Daten berechnete Frequenzgang sich nur unwesentlich von dem vollständig aus der Feldberechnung stammenden unterscheidet. Sowohl bei den Absolutwerten als auch bei der Phase werden die Eigenfrequenzen fast deckungsgleich getroffen. Nur bei einigen Resonanzen weichen Höhe und Frequenz geringfügig ab. Jedoch wird der prinzipielle Kurvenverlauf immer von der Rechnung mit interpolierten Daten wiedergegeben. Für andere Frequenzbereiche und die anderen Tor- und Übertragungsadmittanzen sowie -impedanzen ergeben sich vergleichbare Übereinstimmungen.

Während die Berechnung des kompletten Frequenzganges einschließlich der Feldberechnung über 1069 CPU-Stunden benötigt, sind für den Frequenzgang mit interpolierten Daten nur knapp 407 CPU-Stunden verwendet worden. Dabei ist die Zeit zur Berechnung der Stützstellen (7 Stunden) und die Interpolation (weniger als 10 Minuten) schon eingeschlossen.

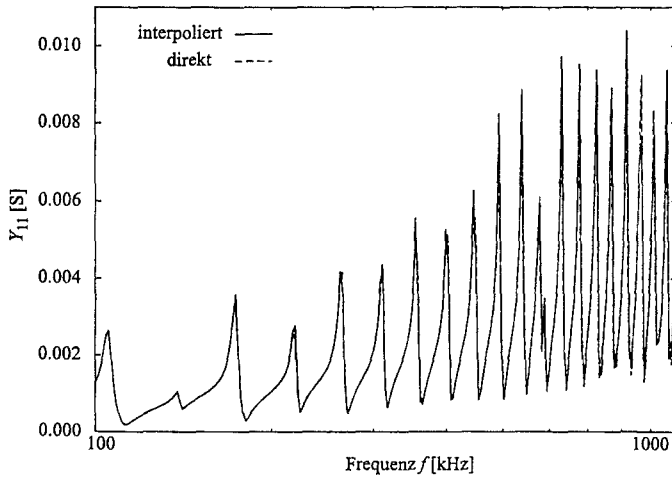


Bild 5.4: Direkt berechneter Absolutwert der überspannungsseitigen Toradmittanz im Vergleich mit interpoliert berechnetem am Beispiel des Modells 1 des 110-kV-/10-kV-Transformators.

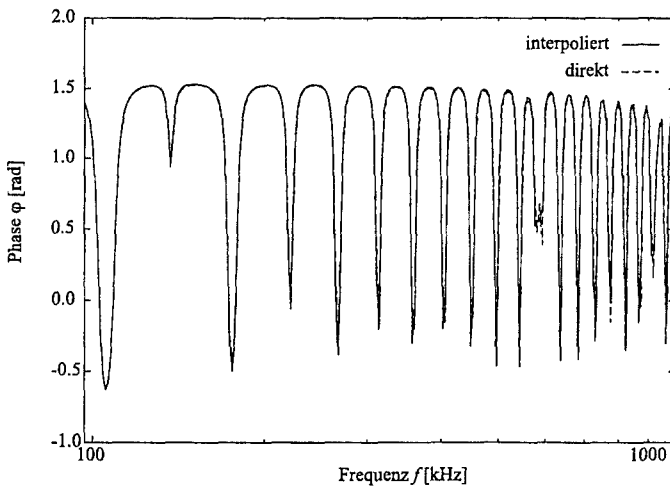


Bild 5.5: Direkt berechnete Phase der überspannungsseitigen Toradmittanz im Vergleich mit interpoliert berechnetem am Beispiel des Modells 1 des 110-kV-/10-kV-Transformators.

Neben dem Vorteil der Zeitersparnis um rund 60 % ergibt sich noch ein geringerer Speicherbedarf. Für die Berechnung der Stützstellen sowie für den kompletten Frequenzgang sind rund 750 MB Hauptspeicher erforderlich. Bei einer Berechnung des Frequenzganges aus den interpolierten Daten senkte sich dieser dann aber auf 365 MB ab. Zwar sind etwa 1000 MB interpolierte Daten auf der Festplatte dafür notwendig; diese stellen jedoch üblicherweise kein Problem dar.

Insgesamt legen die Überstimmung der Frequenzgänge und die enorme Einsparung an Rechnerressourcen die Verwendung von interpolierten Feldberechnungen bei der Bestimmung von umfangreichen Frequenzgängen nahe. So ist es durch die Interpolation erst möglich, bei umfangreicheren Modellen in Frequenzbereichen über 1 MHz mit vielen berechneten Eigenfrequenzen die Dichte der untersuchten Frequenzen hoch genug zu halten, um die einzelnen Eigenfrequenzen auflösen zu können. Einige Beispiele dafür werden im folgenden Abschnitt erläutert.

### 5.3 Frequenzgänge von Leistungstransformatoren

In diesem Abschnitt werden die am Beispiel des 110-kV-/10-kV-Transformators berechneten Frequenzgänge diskutiert. Verwendet wird dabei die oben beschriebene Interpolationsmethode, um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten. Erwartet werden für die Frequenzgänge zahlreiche Eigenfrequenzen, wie ein einfaches Beispiel zeigt.

Betrachtet wird dazu eine Spule wie in Abbildung 5.6. Zunächst seien die Selbstinduktivitäten  $L$  aller Windungen, alle Gegeninduktivitäten  $M$  sowie die Kapazitäten  $C$  zwischen den Windungen jeweils identisch. Unter diesen speziellen Voraussetzungen herrscht eine vollständige Symmetrie zwischen den Windungen, weil durch alle Knotenpunkte in der Abbildung 5.6 der gleiche Strom fließt. Bei insgesamt  $n$  Windungen mit den induktiven Strömen  $I_{L,i}$  mit  $1 \leq i \leq n$  fällt dann über jeder Windung die Spannung

$$\Delta U_i = j\omega \cdot (L \cdot I_{L,i} + M \cdot (I_{L,1} + \dots + I_{L,n} - I_{L,i})) \quad (5.40)$$

ab. Anstatt nun an dieser Stelle sämtliche Maschengleichungen zu einem Gleichungssystem zusammenzufassen, soll die Symmetrie der Spule ausgenutzt werden. Da alle Windungen untereinander identisch sind, müssen alle Windungsströme übereinstimmen, so dass aus Gleichung (5.40)

$$\Delta U_i = j\omega \cdot (L + (n - 1) \cdot M) \cdot I_L \quad (5.41)$$

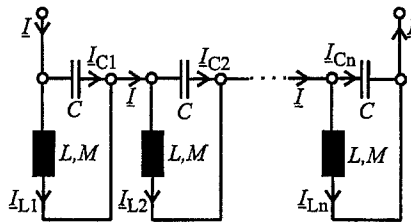


Bild 5.6: Spule mit identischen Selbstinduktivitäten  $L$  sowie Gegeninduktivitäten  $M$  für alle Windungen.

folgt. Diese Spannungsdifferenz entspricht dem Spannungsabfall über den Kondensatoren

$$\Delta U_C = \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot I_C = \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot (I - I_L), \quad (5.42)$$

so dass sich durch Gleichsetzen der Ausdruck

$$I_L = \frac{I}{1 - \omega^2 \cdot C \cdot (L + (n-1) \cdot M)} \quad (5.43)$$

ergibt. Eine Resonanz findet man nur bei der einen Frequenz, die den Leiterstrom  $I_L$  maximal werden lässt, also bei

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C \cdot (L + (n-1) \cdot M)}}. \quad (5.44)$$

Gänzlich anders ist die Situation, wenn die Gleichung (5.40) nicht mehr gilt, weil keine identische Induktivitäten angenommen werden können. In realen Spulen sind die Induktivitäten untereinander zwar ähnlich, jedoch aufgrund der unterschiedlichen räumlichen Lagen der Windungen nicht mehr gleich. Dann führt jede Windung als eigenständiger Energiespeicher zu einer Resonanz. Fügt man noch eine zweite Spule hinzu, erhöht sich die Anzahl der möglichen Resonanzen um ein Vielfaches; denn es können nun nicht nur die spuleninternen Schwingkreise, sondern auch Kopplungen zwischen den Spulen angeregt werden. Schließlich kommen auch noch Erdkapazitäten hinzu, die als weitere Energiespeicher zusätzliche Resonanzkreise mit den Windungen bilden.

In Transformatoren muss man also mit einer Vielzahl von Eigenfrequenzen rechnen. Bevor jedoch auf die eigentlichen Frequenzgänge eingegangen werden soll, muss noch die automatische Verteilung der Kapazitäten zwischen den Leitern beschrieben werden.

#### 5.3.1 Verteilung der Kapazitäten

Zusätzlich zu den erwähnten Erdkapazitäten und Koppelkapazitäten treten auch zwischen den Scheiben oder Lagen der Windungen Kapazitäten sowie Windungskapazitäten zwischen den einzelnen Windungen auf. Letztere sind bei der Modellierung der kapazitiven Kopplungen unberücksichtigt geblieben, weil ihre Anzahl – derzeit noch – zu groß ist. Betrachtet man nur die direkt benachbarten Windungen, so kommen für jeden Leiter mindestens zwei Windungskapazitäten in Frage, so dass allein durch diese mit deutlich über 10000 Kapazitäten zu rechnen wäre. Zum Vergleich beträgt die größte in dieser Arbeit berücksichtigte Anzahl an Kapazitäten gut 4000. Da sich die Windungskapazitäten aufgrund ihrer geringen Größe erst bei hohen Frequenzen auf den Frequenzgang auswirken, entstehen durch ihre Vernachlässigung kaum Fehler.

Bei der großen Anzahl der in den Modellen vorhandenen Leiter sowie der daraus resultierenden Zahl an Kapazitäten ist es notwendig, die Kapazitäten automatisch zu verteilen. Im Folgenden sollen die dazu verwendeten Algorithmen beschrieben werden.

Grundsätzlich wird immer das Prinzip der nächsten Nachbarn angewendet. Nur zwischen diesen werden kapazitive Kopplungen berücksichtigt. Obwohl natürlich auch Kapazitäten zwischen den Leitern existieren, zwischen denen auch noch andere Leiter liegen, werden



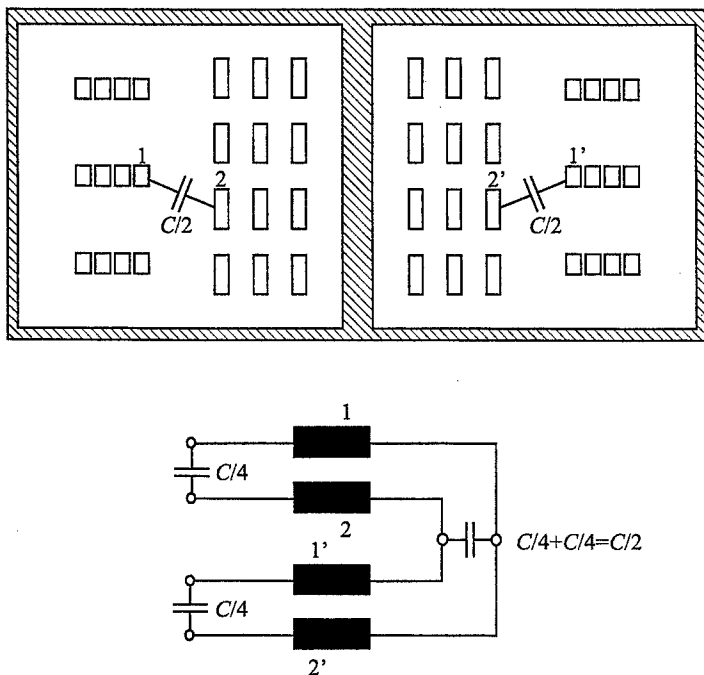


Bild 5.7: Aufteilung einer Kapazität in Form von II-Ersatzschaltbildern.

diese erst bei deutlich höheren Frequenzen relevant und können daher vernachlässigt werden. Eine bessere Näherung ist zur Zeit nicht möglich, da die Anzahl der zu berücksichtigenden Kapazitäten andernfalls zu groß wird.

Alle Kapazitäten werden in Form von II-Ersatzschaltbildern zur Hälfte vor und hinter den Leitern angeordnet. Dabei entfällt zusätzlich eine Hälfte der Kapazität immer auf die Hinleiter, während die andere zwischen den Rückleitern wirkt. Schematisch ist diese Aufteilung in der Abbildung 5.7 dargestellt. In diesem Beispiel wird eine Koppelkapazität zwischen einer Windung der Oberspannungswicklung und einer Windung der Unterspannungswicklung betrachtet. Jeweils ein Anteil von  $C/2$  wird dabei den Hin- und Rückleitern zugeordnet. Im Ersatzschaltbild wird dieser Anteil dann zur Hälfte, also  $C/4$ , vor und hinter den Leiterinduktivitäten eingefügt. Zwischen den gemeinsamen Knotenpunkten von Hin- und Rückleiter ergibt sich damit eine Kapazität von  $C/2$ .

Auf diese Weise werden die Koppelkapazitäten sowie die Scheiben- und Lagenkapazitäten gemäß des Ersatzschaltbildes 5.7 auf einzelne Windungen verteilt. Zu beachten ist dabei, dass immer nur Kapazitäten zwischen Knotenpunkte gelegt werden, die auf derselben Seite des Eisenkerns liegen. Eine Längskapazität, die zwei Knoten vorne und hinten verbindet, verletzt mit dem durch sie hindurch fließenden Strom die Bedingung (2.34), denn diese besagt, dass die Summe der Leiterströme durch die Modellebene identisch Null sein muss.

Auch bei den Erdkapazitäten wird diese Bedingung eingehalten. Aus diesem Grund werden

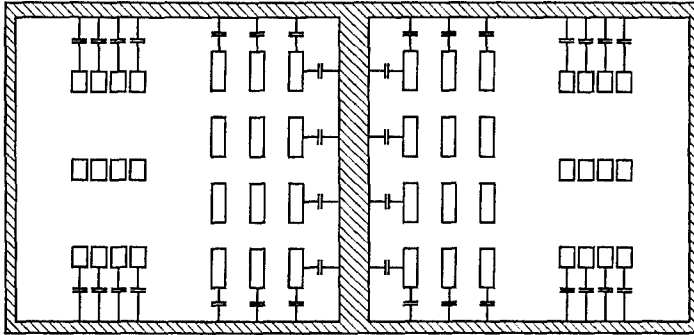


Bild 5.8: Berücksichtigte Erdkapazitäten.

Erdkapazitäten in dieser Arbeit nur von Knotenpunkten vor dem Leiter zum Erdknotenpunkt geführt. Für die Knotenpunkte auf der anderen Seite des Eisenkerns ist keine direkte Verbindung zum Erdknotenpunkt zulässig. Die konkrete Verteilung der Erdkapazitäten zeigt die Abbildung 5.8. Berücksichtigt werden die Erdkapazitäten nur von solchen Leitern, die eine Wicklung oben und unten sowie zum Schenkel hin begrenzen. Bei der Oberspannungswicklung entfallen die kapazitiven Kopplungen zu einem Schenkel, weil sich bei dreiphasigen Transformatoren die Oberspannungswicklung der nächsten Phase anschließt. Die gesamte – z.B. durch eine Messung bestimmte – Erdkapazität einer Wicklung wird gleichmäßig auf alle Windungen verteilt. Mit dieser Näherung vernachlässigt man die unterschiedlichen Abstände zum Joch und zum Schenkel sowie die Kantenlängen der Leiter in der Unterspannungswicklung.

Ein anderes Vorgehen wird bei den Lagen- oder Scheibenkapazitäten gewählt. Da für diese keine Messwerte vorliegen, werden die Lagenkapazitäten mit der Formel für Zylinderkondensatoren der Länge  $l$

$$C = \frac{2\pi\epsilon \cdot l}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \quad (5.45)$$

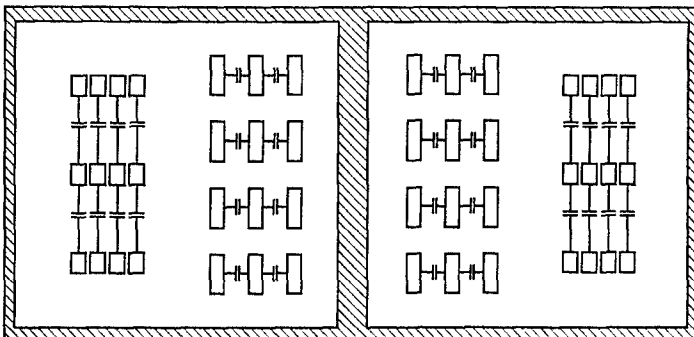


Bild 5.9: Berücksichtigte Lagen- und Scheibenkapazitäten.

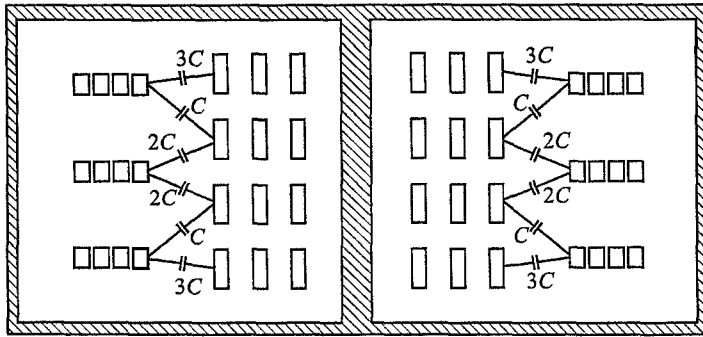


Bild 5.10: Berücksichtigte Koppelkapazitäten.

abgeschätzt. Die inneren und äußeren Radien sind dabei durch  $r_i$  und  $r_a$  gegeben. Bei Scheibenwicklungen mit einem Abstand  $d$  kann man von Plattenkondensatoren ausgehen, für die

$$C = \frac{\epsilon \pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)}{d} \quad (5.46)$$

gilt. So ermittelte Scheiben- und Lagenkapazitäten werden dann, wie in Abbildung 5.9 verdeutlicht wird, zu gleichen Teilen zwischen den sich jeweils gegenüberliegenden Leitern angeordnet. Als Voraussetzung dafür müssen jedoch alle benachbarten Lagen oder Scheiben die gleiche Windungszahl aufweisen. Dieses ist bei den hier untersuchten Modellen der Fall, so dass auf einen komplexeren Verteilungsalgorithmus verzichtet wird.

Bei den Koppelkapazitäten muss jedoch ein anderes Verfahren verwendet werden, weil die Anzahl der durch Kapazitäten zu verbindenden Leiter in den beiden Wicklungen unterschiedlich ist. Zwar kann die gesamte Koppelkapazität zwischen zwei Wicklungen auch über einen Zylinderkondensator abgeschätzt werden, sofern keine Messungen vorliegen; eine Verteilung zu gleichen Anteilen ist jedoch nur in Ausnahmefällen möglich. In der Abbildung 5.10 wird ein typisches Beispiel illustriert. Den vier Leitern pro Lage in der Unterspannungswicklung stehen drei Scheiben in der Oberspannungswicklung gegenüber. Grundlage für die Verteilung der Koppelkapazität ist hier der Ansatz, dass pro Längeneinheit die Kapazität zwischen den beiden Wicklungen gleich sein soll. Falls die beiden Wicklungen etwa die gleiche Höhe aufweisen, ist diese Näherung plausibel.

Wenn die Kapazität pro Längeneinheit konstant verteilt wird, bedeutet das, dass von jedem Leiter der einen Wicklung die gleiche Kapazität zu Leitern der anderen Wicklung führt. Bei ungleichen Leiterzahlen in beiden Wicklungen können deshalb nicht immer nur zwei Leiter kapazitiv verbunden werden. Vielmehr werden eine Reihe kleiner Elementarkapazitäten  $C$  wie in der Abbildung 5.10 verteilt. Deren Zahl ist gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der zu verbindenden Leiter. Diese Elementarkapazitäten werden nun von oben nach unten zwischen den Leitern angeordnet. Ist der Anteil eines Leiters an der Gesamtkapazität erreicht, geht man zum nächsten über. So können Leiter der einen Wicklung durchaus mit mehreren Leitern der anderen Wicklung kapazitiv verbunden sein. Bei dem Beispiel in Abbildung 5.10 bewirkt diese Art der Aufteilung, dass jeder der vier Leiter der

innenliegenden Unterspannungswicklung mit jeweils einer Kapazität von  $3 \cdot C$  an die Oberspannungswicklung gekoppelt ist. Umgekehrt beträgt die Kapazität zwischen den Leitern der Oberspannungswicklung und der Unterspannungswicklung  $4 \cdot C$ . Insgesamt sind damit für Hin- und Rückleiter  $24 \cdot C$  verteilt worden. Daraus kann man abschließend die Größe der Elementarkapazität  $C$  bestimmen.

Mit dem hier vorgestellten Verfahren ist es möglich, die Verteilung von mehreren Tausend Kapazitäten zwischen den Leitern automatisch durchzuführen. Dabei sind mehrere Näherungen eingeführt worden, bei denen immer diskrete Kapazitäten Verwendung finden. Dieses ist ein systematischer Fehler, denn tatsächlich erstrecken sich die kapazitiven Kopplungen kontinuierlich über die gesamten Windungen. Da das verwendete Modell der Induktivitäten jedoch diskrete Leiter vorgibt, kann man die Kapazitäten nur daran anpassen. Auch können die hier beschriebenen Vorgehensweisen nicht unbedingt auf alle mit der Randlelementmethode berechenbaren Geometrien verallgemeinert werden. Eine Rechtfertigung findet diese Methode darin, dass die berechneten Frequenzgänge vom Erscheinungsbild mit denjenigen übereinstimmen, die von anderen Transformatoren messtechnisch ermittelt worden sind.

#### 5.3.2 Berechnete Frequenzgänge des 110-kV-/10-kV-Transformators

Am Beispiel des von der Streuinduktivitätsberechnung her bekannten 110-kV-/10-kV-Transformators sollen die rechnerisch bestimmten Frequenzgänge diskutiert werden. Dabei steht auch in diesem Abschnitt der Vergleich zwischen den verschiedenen Modellen im Vordergrund. Die in der Tabelle 5.1 angegebenen Rechenzeiten zeigen, dass der Rechenzeitbedarf bei detaillierteren Modellen stark ansteigt, so dass wieder überprüft werden muss, ob man auch mit größeren Modellen zu aussagekräftigen Ergebnissen kommen kann.

Modell	Kapazitäten	Rechner	CPU-Zeit
1	1635	HP-L2000	23711 min
2	2743	HP-V2250	104750 min
3	4151	HP-N4000 und HP-V2250	255586 min

Tabelle 5.1: Anzahl der berücksichtigten Kapazitäten und Rechner-Ressourcen zur Bestimmung der Frequenzgänge.

Berechnet worden sind jeweils die Frequenzgänge der Modelle 1, 2 und 3 des 110-kV-/10-kV-Transformators in einem Frequenzbereich von 1 Hz bis 10 GHz. Mit einer logarithmischen Schrittweite von 1 % sind 2314 Punkte ausgewertet worden. In den Modellen wird von den vom Hersteller gemessenen Erdkapazitäten von 1,5 nF für die Oberspannungswicklung und 5,0 nF für die Unterspannungswicklung sowie von einer Koppelkapazität zwischen den beiden Wicklungen von 3,3 nF ausgegangen. Die Lagen- und Scheibenkapazitäten sind mit den Beziehungen (5.45) und (5.46) abgeschätzt worden. Dabei haben sich Kapazitäten von 8,0 nF zwischen den Lagen der Unterspannungswicklung und etwa 0,5 nF zwischen den Scheiben der Oberspannungswicklung ergeben. Die Gesamtzahl der so erzeugten diskreten Kapazitäten ist in der Tabelle 5.1 aufgeführt. Zu beachten ist dabei, dass hier nur einphasige Modelle sowie die Interpolationsmethode für die induktiven Kopplungen verwendet worden sind. Dreiphasige Modelle sind aufgrund ihrer enormen Anzahl an Kapazitäten derzeit nicht berechenbar, zumal für einen aussagekräftigen Frequenzgang eine gewisse Mindestdichte der berechneten Punkte vorhanden sein muss. Der Verzicht auf dreiphasige Modelle hat nach

den Berechnungen und Messungen in [24] nur geringen Einfluss auf die Ergebnisse.

Zunächst soll der Frequenzgang der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  untersucht werden. Diese ist im Kurzschlussfall bei eingepprägter Spannung proportional zum Eingangsstrom in der Überspannungswicklung und damit von besonderem Interesse. Dargestellt ist der Bereich von 10 kHz bis 600 kHz in logarithmischer Darstellung. In dieses Frequenzintervall fallen die ersten zehn Eigenfrequenzen, die in der Tabelle 5.2 aufgeführt sind. Als Eigenfrequenzen werden hier die Pole der Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  bezeichnet.

Nummer	Frequenz
1	22,5 kHz
2	63,2 kHz
3	111,0 kHz
4	143,9 kHz
5	192,0 kHz
6	253,9 kHz
7	313,0 kHz
8	364,3 kHz
9	441,8 kHz
10	497,9 kHz

Tabelle 5.2: Ermittelte niedrige Eigenfrequenzen der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  für das Modell 3 des 110-kV-/10-kV-Transformators.

Den Verlauf der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  bezüglich Betrag und Phase zeigt das Abbildungspaar 5.11 und 5.12. Bei etwa 10 kHz findet der Übergang vom induktiven zum kapazitiven Verhalten statt. An dieser Stelle weist  $Y_{11}$  eine Nullstelle auf. Danach zeigt der Frequenzgang eine Reihe von Eigenfrequenzen, die sowohl an der Amplitude als auch an der Phase zu erkennen sind. Bei Frequenzen über 100 kHz nimmt die Dichte der Eigenfrequenzen merklich zu. Die Frequenzgänge in den Abbildungen 5.11 und 5.12 sind mit dem größten Modell 1 des 110-kV-/10-kV-Transformators berechnet worden. Auf den nachfolgenden Seiten zeigen die Abbildungen 5.13 und 5.14 unter identischen Voraussetzungen berechnete Frequenzgänge mit dem Modell 2; die mit Modell 3 bestimmten Frequenzgänge sind in den Abbildungen 5.15 und 5.16 dargestellt.

Ein Vergleich der drei mit den unterschiedlichen Modellen ermittelten Frequenzgänge zeigt zunächst leichte Unterschiede zwischen dem Modell 1 und den anderen beiden. Zwischen den beiden Modellen 2 und 3 sind die Differenzen jedoch nur noch minimal. Dieses kann als erstes Indiz dafür aufgefasst werden, dass man auch bei der Berechnung von Frequenzgängen im unteren Frequenzbereich schon bei recht groben Modellen konvergierende Ergebnisse erhalten kann.

Bei höheren Frequenzen kann diese Aussage natürlich nicht mehr zutreffen. In Bereichen oberhalb von 1 MHz macht sich die detaillierte Modellierung der Induktivitäten und der Kapazitäten zunehmend bemerkbar. Auch dieses Verhalten kann an den Frequenzgängen der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz gezeigt werden. Als Beispiel dienen dafür die Frequenzgänge der Modelle 1 und 2 im Frequenzbereich zwischen 1 MHz und 100 MHz. In den Abbildungen 5.17 und 5.18 sowie 5.19 und 5.20 sind jeweils Betrag und Phase der Eingangsadmittanz dargestellt. Dabei sind Unterschiede zu erkennen.

Zunächst ist die markante Resonanzspitze, die bei Modell 1 bei etwa 1,05 MHz ermittelt

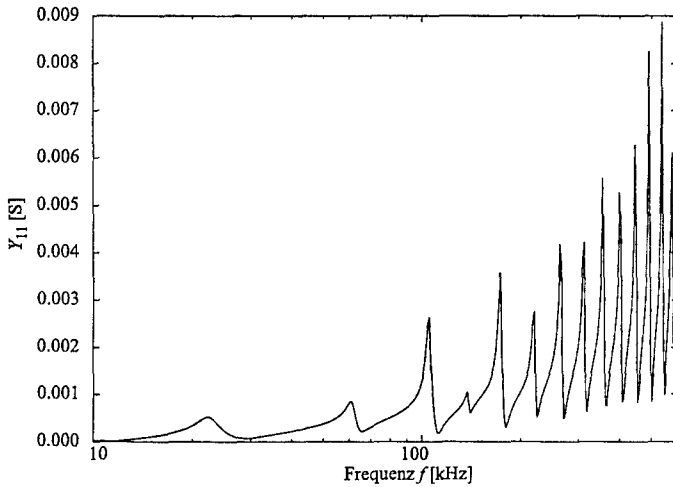


Bild 5.11: Berechnete überspannungsseitige Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 1.

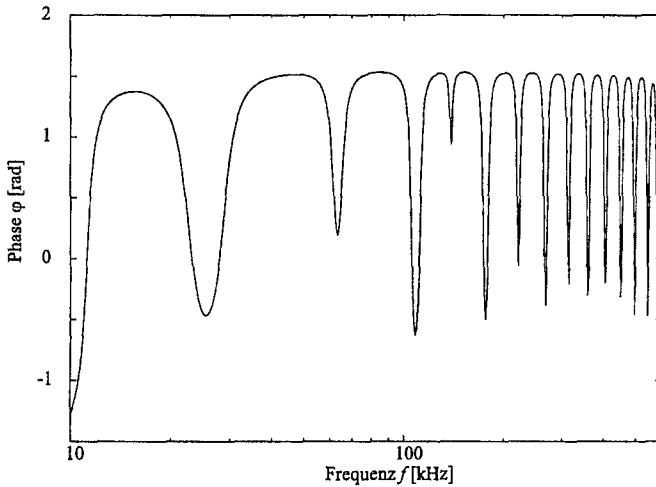


Bild 5.12: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 1.

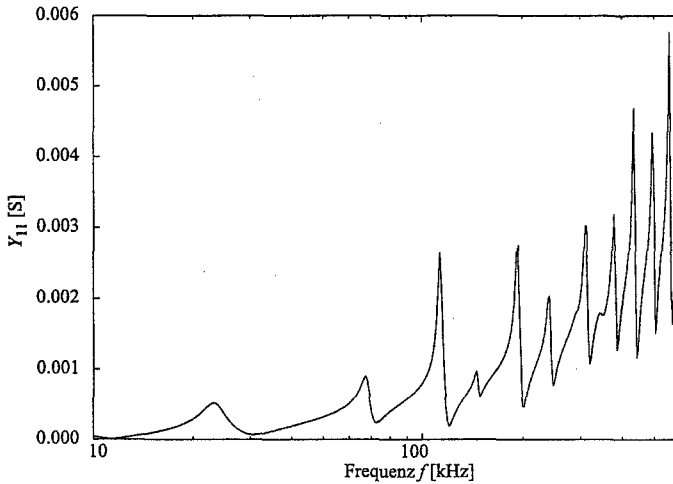


Bild 5.13: Berechnete überspannungsseitige Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 2.

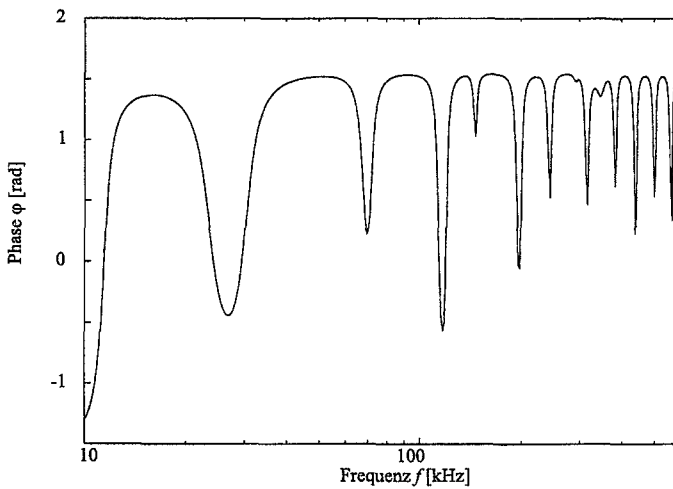


Bild 5.14: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 2.

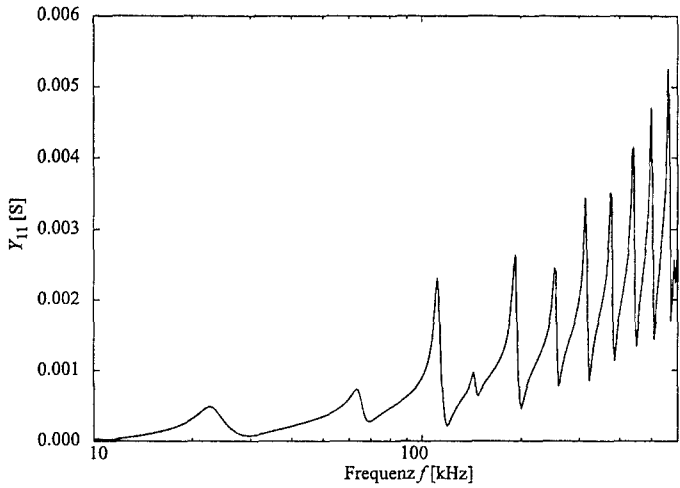


Bild 5.15: Berechnete oberspannungsseitige Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 3.

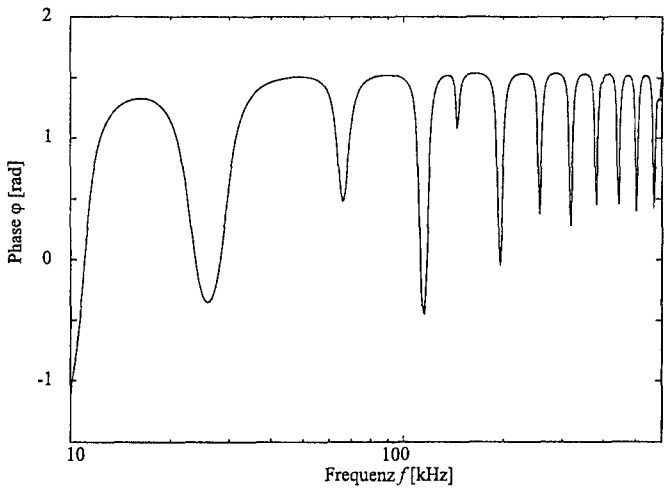


Bild 5.16: Berechnete Phase der oberspannungsseitigen Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 3.



worden ist, im Modell 2 nicht mehr vorhanden. Eine andere Spitze ähnlicher Höhe befindet sich stattdessen bei etwa 3 MHz. Einige weitere sind zwischen 10 MHz und 100 MHz zu erkennen. Diese nur wenig gedämpften Spitzen bilden sich infolge von Resonanzen zwischen den kleinsten Energiespeichereinheiten aus, den Windungen. Bedingt durch die dabei kurze Leiterlänge können die berücksichtigten ohmschen Widerstände einschließlich der Wirbelstromeffekte die Resonanz nur wenig wirksam dämpfen. Im folgenden Abschnitt wird auf diese Eigenfrequenzen noch näher eingegangen.

Weiterhin ist die Anzahl der Eigenfrequenzen im Modell 1 deutlich niedriger als im Modell 2. Verursacht wird dieses Verhalten durch die höhere Anzahl an unabhängigen Energiespeichern – Induktivitäten und Kapazitäten – des Modells 2, denn prinzipiell gilt, dass  $n$  Energiespeicher  $n$  Eigenwerte und damit bis zu  $\frac{n}{2}$  Eigenfrequenzen hervorrufen. Aus dem gleichen Grunde erhöht auch das Modell 3 erneut die Anzahl der Eigenfrequenzen. Die zugehörigen Frequenzgänge sind in den Abbildungen 5.21 und 5.22 dargestellt. Während der allgemeine Kurvenverlauf bei Betrag und Phase weitestgehend erhalten bleibt, sind zusätzlich im Bereich um 10 MHz nun auch Eigenfrequenzen zu erkennen, die bei den Modellen 1 und 2 noch nicht vorhanden gewesen sind. Ab ca. 100 MHz sind bei allen Modellen die Eigenfrequenzen abgeklungen, und die Eingangsadmittanz steigt infolge des nunmehr rein kapazitiven Verhaltens an. Prinzipiell ähnliche Frequenzgänge weisen auch die unterspannungsseitige Eingangsadmittanz  $Y_{22}$  sowie die Übertragungsadmittanzen  $Y_{12}$  und  $Y_{21}$  auf.

Aufgrund der Unterschiede zwischen den Modellen wird deutlich, dass im Bereich von Frequenzen über 1 MHz die Verwendung zu grober Modelle zu wesentlich unterschiedlichen Frequenzgängen führen kann. Dabei darf dieser Frequenzbereich nicht grundsätzlich vernachlässigt werden, denn durch schnelle Schaltvorgänge mit SF<sub>6</sub>-Trennern oder Blitzschläge können abgeschnittene Wanderwellen entstehen, die wiederum in Schaltanlagen mehrfach reflektiert werden. In den Spektren solcher Reflexionswellen sind merklich hochfrequente Anteile enthalten. Wenn diese die entdämpften Resonanzen anregen, können Teile der Anlage, wie z.B. Schalter oder der Transformator selber, durch zu große Ströme zerstört werden. Vergleichende Messungen des Herstellers liegen nicht vor, denn diese sind extrem aufwendig. Z.B. leiten die Durchführungskapazitäten bei solch hohen Frequenzen schon einen großen Anteil des Stromes ab.

Neben den Frequenzgängen der Eingangsadmittanz sollen auch noch die Frequenzgänge der Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  betrachtet werden. Im Gegensatz zur Eingangsadmittanz, die im Kurzschlussfall die Ströme bestimmt, ist die überspannungsseitige Eingangsimpedanz umgekehrt proportional zum überspannungsseitigen Leerlaufstrom bei gegebener Spannung. Wie auch bei der Eingangsadmittanz sollen hier wieder die Modelle 1 bis 3 untersucht werden. Nach Betrag und Phase aufgeteilt, sind die Frequenzgänge der überspannungsseitigen Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  des Modells 1 in den Abbildungen 5.23 und 5.24 dargestellt, während die Abbildungen 5.25 und 5.26 die Frequenzgänge von Modell 2 und die Abbildungen 5.27 und 5.28 die von Modell 3 enthalten.

Auch bei den Eingangsimpedanzen ist eine weitgehende Übereinstimmung im Frequenzbereich bis 1 MHz vorhanden. Tatsächlich differieren die Frequenzgänge der Modelle 2 und 3 in diesem Bereich nur geringfügig (vgl. Abbildungen 5.25 bis 5.28), während bei Modell 1 Abweichungen vor allem in der Phase festzustellen sind. Oberhalb von 1 MHz treten dann auch verstärkt Unterschiede zwischen den Modellen 2 und 3 auf, wie ein direkter Vergleich zwischen den Abbildungen 5.26 und 5.28 zeigt.

Als Beispiel für die geringe Abweichung bei niedrigen Frequenzen sei hier noch auf die Reso-

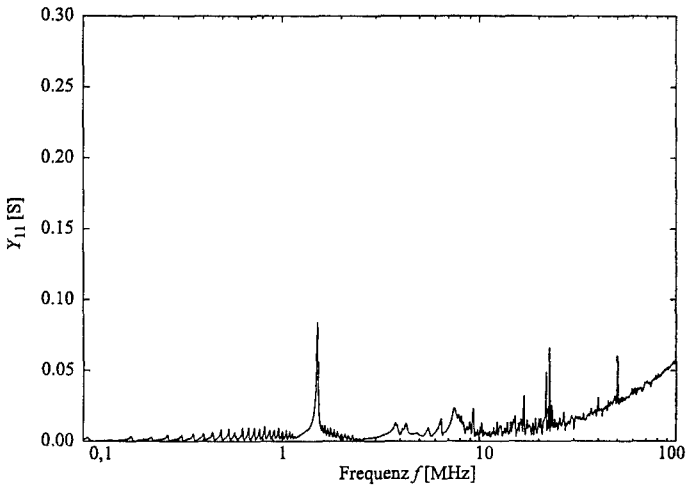


Bild 5.17: Berechnete oberspannungsseitige Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 1.

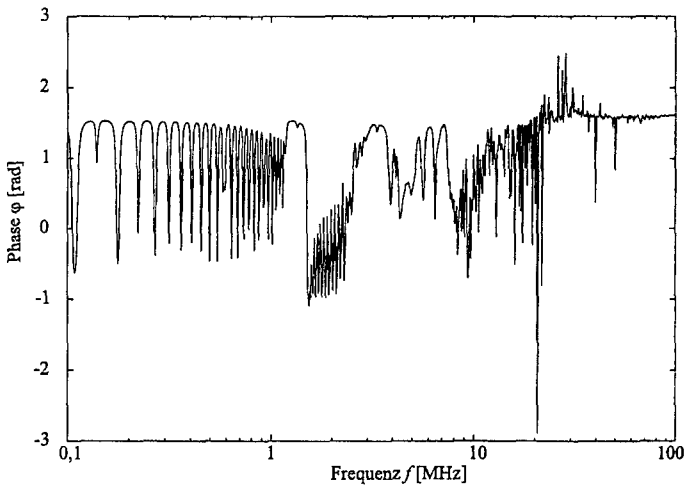


Bild 5.18: Berechnete Phase der oberspannungsseitigen Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 1.

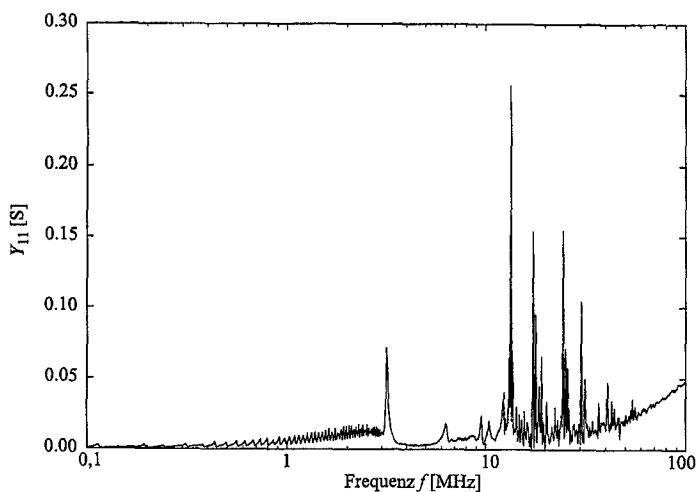


Bild 5.19: Berechnete überspannungsseitige Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 2.

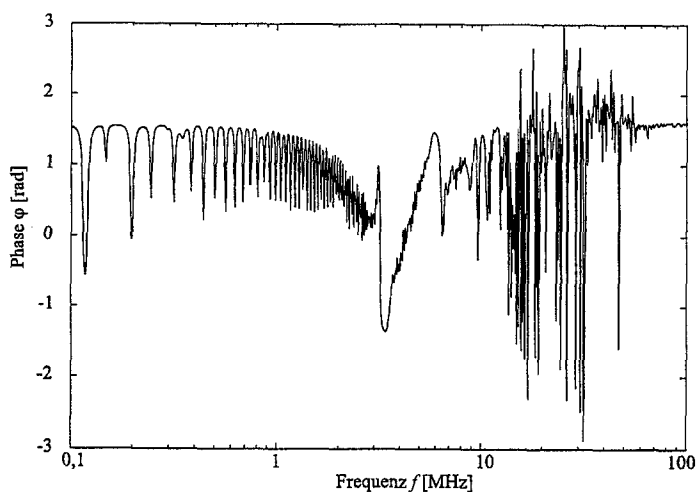


Bild 5.20: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 2.

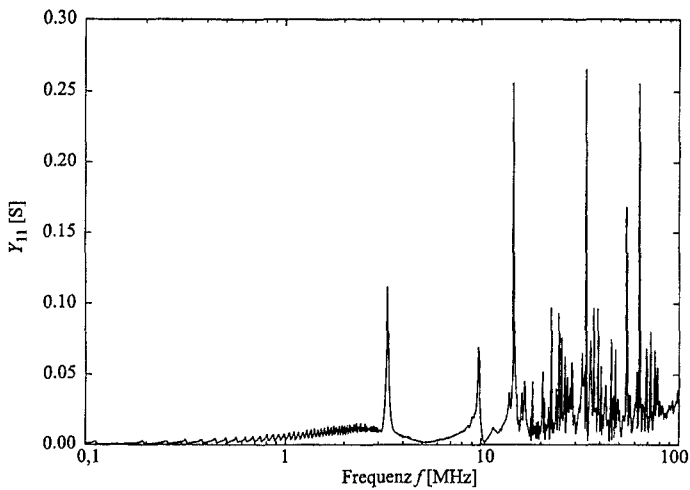


Bild 5.21: Berechnete überspannungsseitige Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 3.

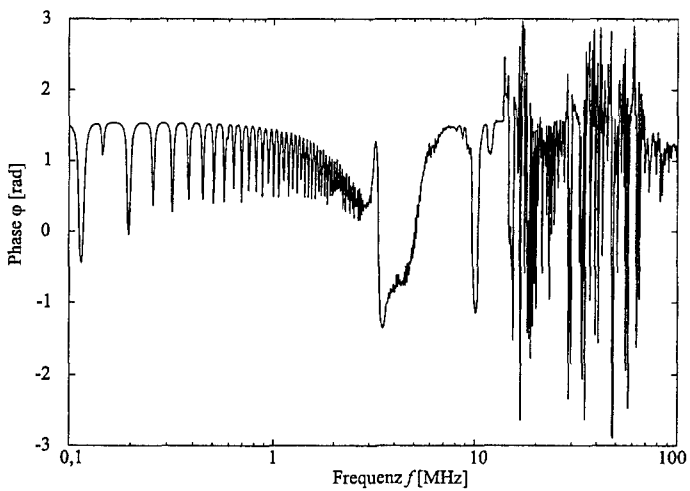


Bild 5.22: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz  $Y_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 3.

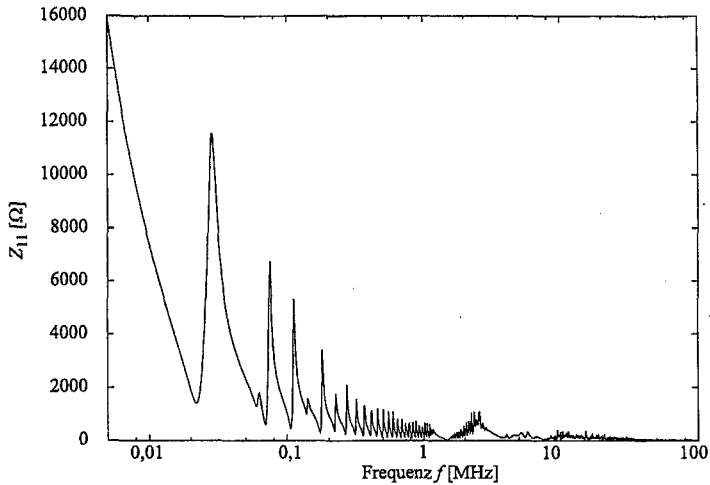


Bild 5.23: Berechnete überspannungsseitige Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 1.

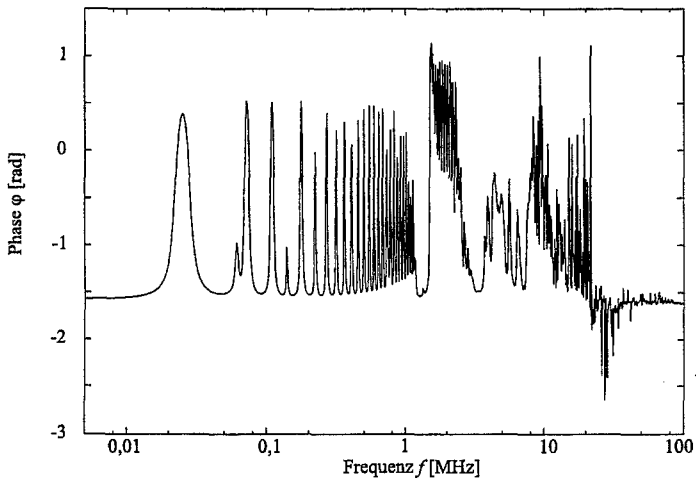


Bild 5.24: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 1.

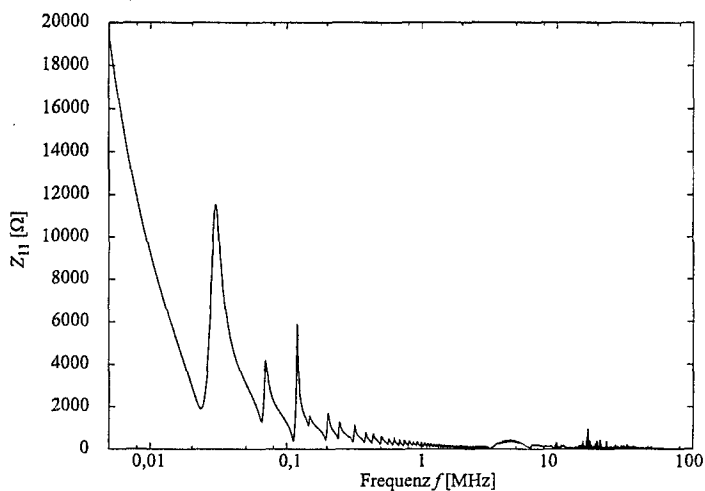


Bild 5.25: Berechnete überspannungsseitige Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 2.

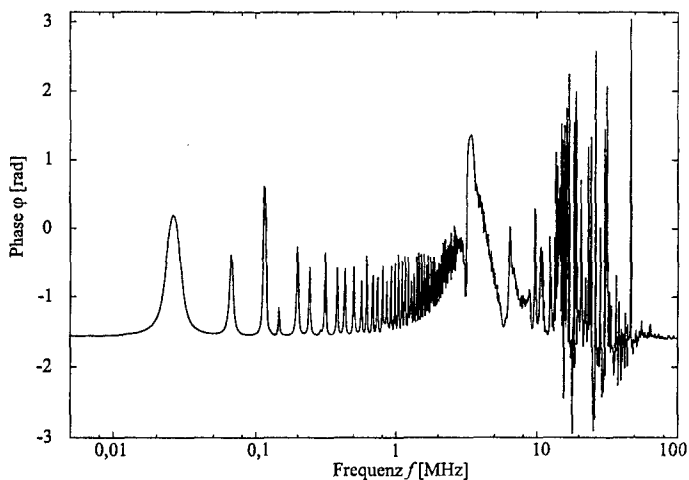


Bild 5.26: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 2.

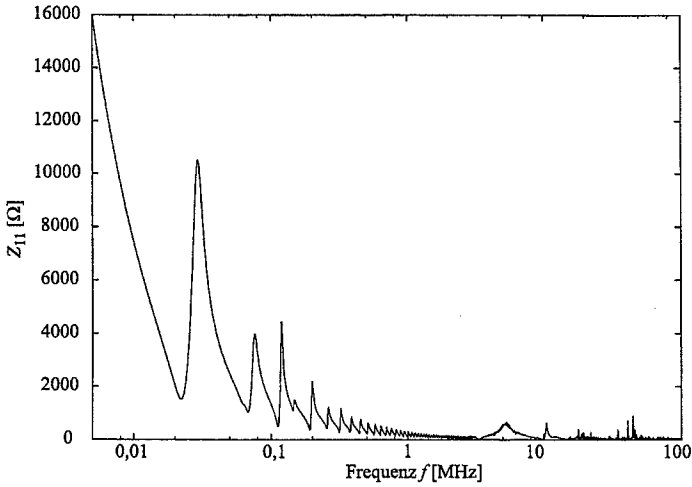


Bild 5.27: Berechnete überspannungsseitige Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 3.

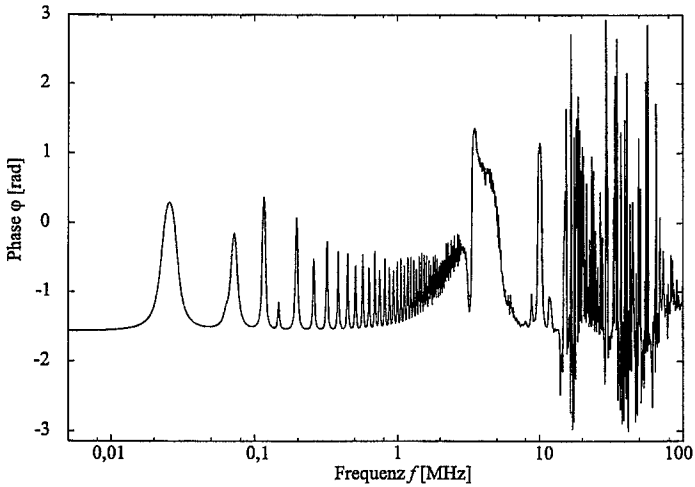


Bild 5.28: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  des 110-kV-/10-kV-Transformators für das Modell 3.

nanz zwischen der Hauptinduktivität und der Eingangskapazität hingewiesen. Beide Größen variieren von Modell 1 bis 3 nur wenig, so dass die Eingangsimpedanz diese Übereinstimmung widerspiegeln muss. Die Abbildungen 5.29 und 5.30 zeigen die oberspannungsseitige Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  im Bereich um 100 Hz, in dem diese Resonanz bei einer Hauptinduktivität von knapp 2000 H und einer Eingangskapazität von einigen nF gemäß

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} \quad (5.47)$$

liegen sollte. Die dargestellten Kurven unterscheiden sich im untersuchten Frequenzbereich sowohl bezüglich des Betrags als auch der Phase nur um wenige Prozent. Es ist dabei aber keine Tendenz von Modell zu Modell abzuleiten, da die Modelle 1 und 3 fast deckungsgleiche Frequenzgänge aufweisen, während das Modell 2 etwas abweicht.

Insgesamt kann als Ergebnis der Frequenzgangberechnung festgehalten werden, dass mit der Randelementmethode bei nachgeschalteter Netzberechnung zwar plausible Frequenzgänge berechnet werden können, mangels vergleichbarer Messdaten ist jedoch keine Aussage über die Genauigkeit der Rechnungen möglich. Als Fehlerquelle kommt hier vor allem die Modellierung der Kapazitäten in Frage. Lediglich die sich im Frequenzbereich bis 1 MHz ergebende Konvergenz lässt darauf schließen, dass das Verfahren bei einer vollständigen Modellierung auch realistische Ergebnisse liefern kann. Bei höheren Frequenzen lassen sich nur noch tendenzielle Aussagen gewinnen. Im nächsten Abschnitt wird nun die Frage untersucht, welche Stromverteilungen sich innerhalb der Wicklungen bei Speisung mit einer Eigenfrequenzen entlang der Spulenachse einstellen.

## 5.4 Lokale Stromverteilung innerhalb der Wicklungen

Anhand der im vorangegangenen Abschnitt bestimmten Toradmittanzen sind bereits die ersten Eigenfrequenzen des 110-kV-/10-kV-Transformators ermittelt worden (vgl. dazu auch Tabelle 5.2). Während bei Frequenzen unterhalb der ersten Eigenfrequenz das magnetische Feld weitgehend gleichmäßig über den zweidimensionalen Querschnitt verteilt ist, ändert sich dieses Verhalten in der Nähe der ersten Eigenfrequenz. Durch die Kapazitäten können Ströme aus einer Wicklung heraus- oder hineinfließen, wie es in [13] beschrieben ist. Es bilden sich dabei Bereiche entlang der Wicklung aus, in denen entgegengesetzte Ströme fließen; die zugehörige Feldverteilung wird Eigenform genannt. An verschiedenen Transformatoren sind diese Eigenformen in [24] gemessen worden. Grundlage für regelmäßige Eigenformen sind zahlreiche Maschen aus weitgehend gleichen Kapazitäten und Induktivitäten zwischen den Windungen.

Eine auf der Randelementmethode beruhende Feldberechnung unter Beachtung der kapazitiven Kopplungen ermöglicht eine numerische Überprüfung dieser Eigenformen bei Speisung mit Eigenfrequenzen. Während in [13] die Eigenformen auf die Erdkapazitäten zurückgeführt werden, sind bei dem hier untersuchten Modell hauptsächlich die Koppelkapazitäten zwischen der Ober- und der Unterspannungswicklung für die Bildung der Eigenformen verantwortlich. Als Ursache dafür muss vor allem die Art der Diskretisierung der Kapazitäten angesehen werden. Bei einer Oberspannungswicklung mit Scheibenspulen werden nur Erdkapazitäten an den oberen und unteren Scheiben berücksichtigt, so dass keine Erdkapazitäten längs der Spulenachse vorhanden sind. Anders ist die Situation bei der Koppelkapazität. In



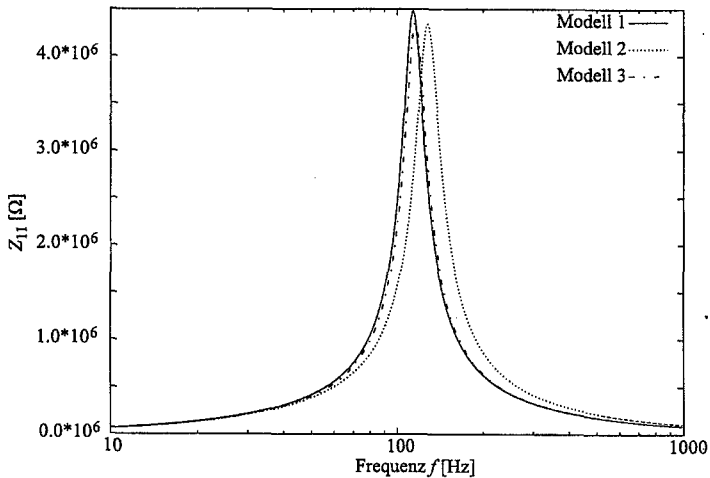


Bild 5.29: Berechnete überspannungsseitige Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  der Modelle 1 bis 3 im Vergleich in der Nähe der Resonanz zwischen Hauptinduktivität und Eingangskapazität.

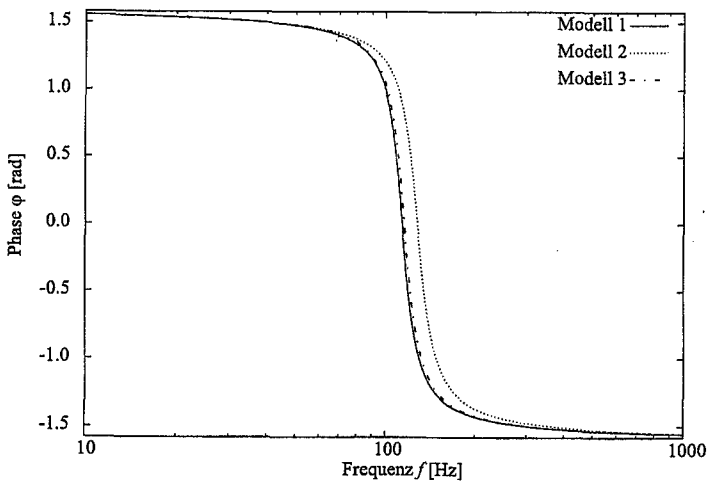


Bild 5.30: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsimpedanz  $Z_{11}$  der Modelle 1 bis 3 im Vergleich in der Nähe der Resonanz zwischen Hauptinduktivität und Eingangskapazität.

dem hier verwendeten Modell ist diese gleichmäßig zwischen den benachbarten Leitern der Ober- und Unterspannungswicklung aufgeteilt.

Für einen sekundärseitigen Kurzschluss ist die Verteilung der Leiterströme entlang der Oberspannungswicklung für den Bereich der ersten zehn Eigenfrequenzen in der Abbildung 5.31 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die fast sinusförmige Verteilung der Leiterströme entlang der Wicklungsachse. Dieses erinnert an stehende Wellen. Bei den Eigenformen entspricht eine Wellenlänge zwei Bereichen – sinusförmigen Bögen – mit entgegengesetzter Stromrichtung, wie von [24] gemessen worden ist. Analog zu den Oberschwingungen bei stehenden Wellen auf Saiten kommt auch hier mit jeder Eigenfrequenz eine Halbwelle dazu. Dabei erfüllt die Wellenlänge der Oberschwingung  $n$  die aus der Mechanik bekannte Bedingung

$$\lambda_n = \frac{2 \cdot h}{n}, \quad (5.48)$$

wobei  $h$  die Spulenhöhe darstellt, vgl. dazu auch [25]. Im Gegensatz zur schwingenden Saite, bei der beliebig hohe Oberschwingungen auftreten können, ist hier jedoch die Anzahl der Eigenformen durch die Windungszahl begrenzt. Innerhalb einer Windung kann sich die Stromrichtung nicht umkehren, so dass keine kleineren Einheiten gegeneinander schwingen können.

Ein insgesamt recht ähnliches Verhalten ergibt sich auch im Leerlauf, wie die Abbildung 5.32 zeigt. Zwar sind die Eigenformen bei den ersten Eigenfrequenzen noch etwas gestört, aber etwa ab der fünften Eigenfrequenz bilden sich auch hier recht deutlich sinusförmige Bögen heraus. Da die Induktivitäten sowie die ohmschen Widerstände der einzelnen Windungen der Oberspannungswicklung relativ ähnlich sind, ergeben sich für die Spannungsabfälle entlang der Wicklung quasi identische Verteilungen. Um rund eine viertel Wellenlänge der Eigenform verschoben sind hingegen die kapazitiven Ströme, die immer im Bereich des Vorzeichenwechsels im Leiterstrom ihr Maximum annehmen.

Im Detail sind die berechneten Stromverteilungen für die ersten vier Eigenfrequenzen in der Abbildung 5.33 wiedergegeben. Dargestellt sind Betrag und Phase der Leiterströme entlang der Wicklungsachse im Kurzschlussfall. Durch die Verwendung des Betrages ergeben sich sinusartige Kurven für den Strom nur unter Berücksichtigung der Phase. Bei jeder Nullstelle des Betrages liegt bedingt durch den Sprung in der Phase von etwa  $\pi$  ein Vorzeichenwechsel im Strom vor.

Mit steigender Frequenz nimmt die Anzahl der gegeneinander schwingenden Bereiche in den Eigenformen zu. In gleichem Maße nimmt deren Größe ab. Etwa bei Frequenzen von 1 MHz werden diese so klein, dass sie nur noch einzelne Windungen enthalten. Man kann dann keine Eigenformen in der Stromverteilung mehr auflösen. Windungen sind in diesem Modell die kleinsten Bereiche, die gegeneinander schwingen können. Dieses wird vom induktiven Modell bestehend aus Hin- und Rückleiter festgelegt. Durch die geringe Impedanz aufgrund der kurzen Länge einer Windung können sich besonders hohe Resonanzspitzen im Bereich dieser Eigenfrequenzen bilden, obwohl ohmsche sowie Wirbelstromverluste berücksichtigt werden. In den Abbildungen 5.17, 5.19 sowie 5.21 sind einige dieser fast ungedämpften Resonanzen zu erkennen. Es kann dabei innerhalb einzelner Windungen zu Strömen kommen, die deutlich über den Nennströmen der Wicklungen liegen. Ansatzweise ist diese Überhöhung schon an den Strömen bei etwa 1 MHz in der Abbildung 5.31 zu sehen. Je kleiner die gegeneinander schwingenden Bereiche werden, desto größer sind die Spannungsgradienten

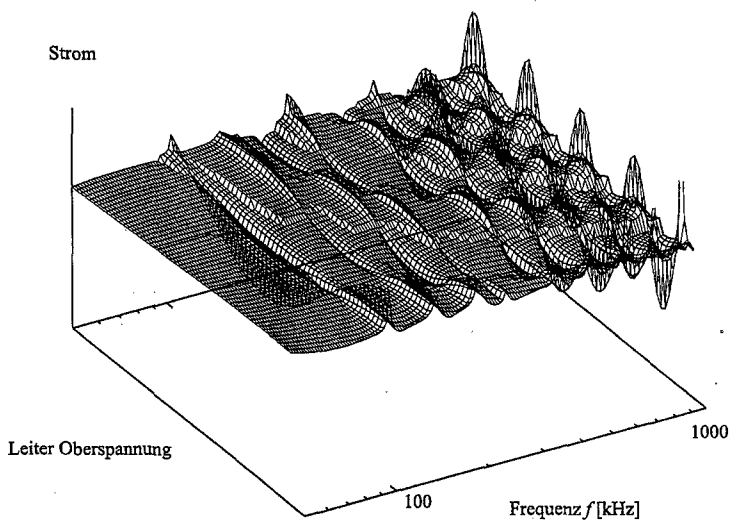


Bild 5.31: Räumliche Abhängigkeit der Leiterströme entlang der Wicklungsachse bei einem unterspannungsseitigen Kurzschluss im Bereich der ersten zehn Eigenfrequenzen.

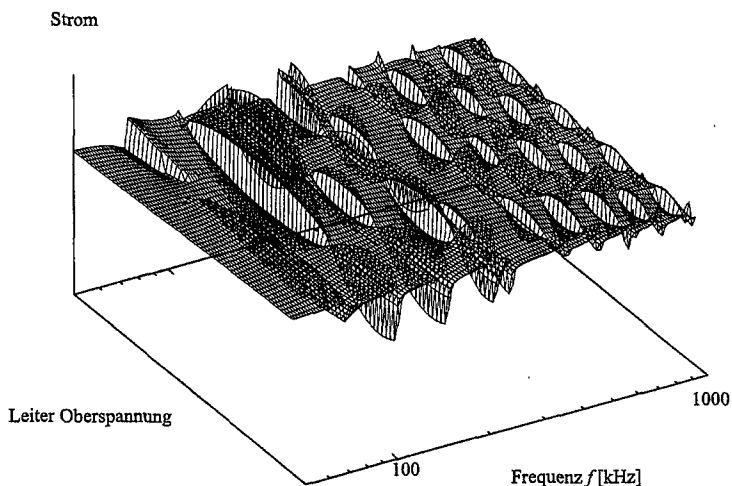


Bild 5.32: Räumliche Abhängigkeit der Leiterströme entlang der Wicklungsachse im Leerlauf im Bereich der ersten zehn Eigenfrequenzen.

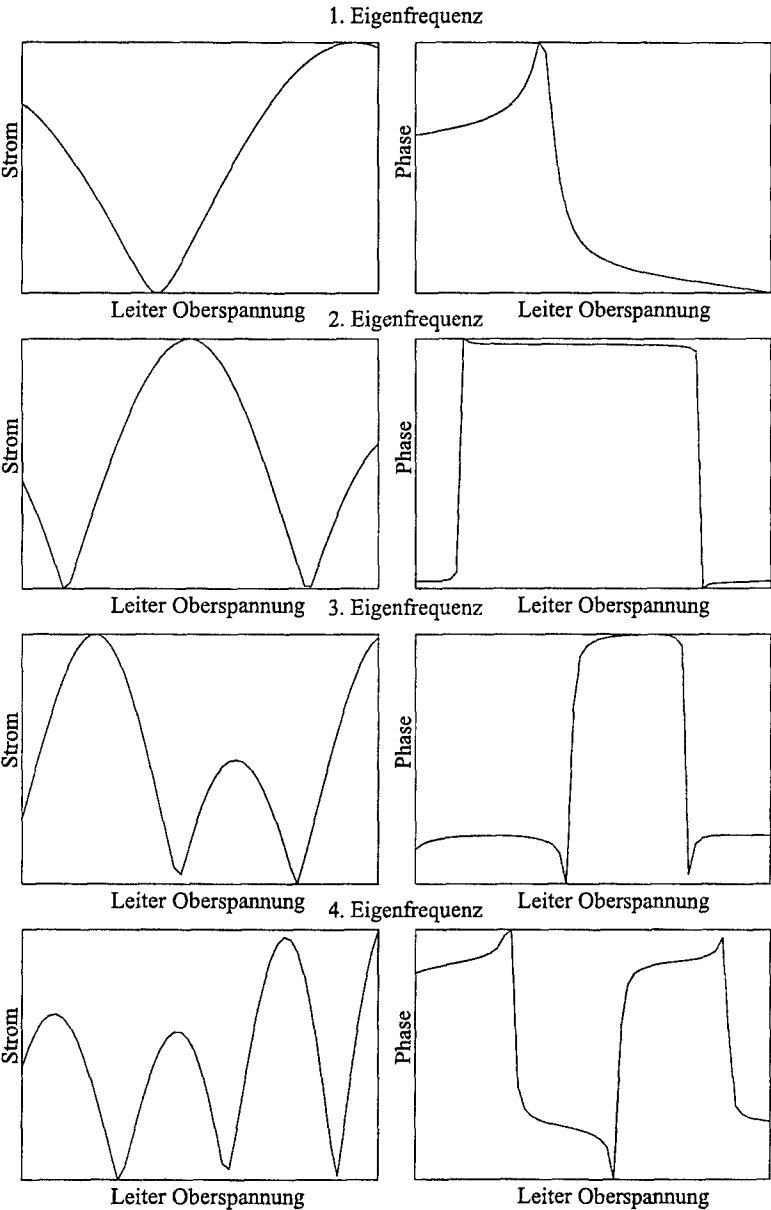


Bild 5.33: Stromverteilung in der Oberspannungswicklung bei den ersten vier Eigenfrequenzen im Kurzschlussfall.

zwischen benachbarten Windungen. Daraus resultierende Spannungsdifferenzen belasten die Windungsisolation besonders stark. Dabei tritt eine solche Beanspruchung im Abstand einer halben Wellenlänge der Eigenform über die ganze Wicklung verteilt gleich mehrfach auf.

Wie schon bei den Frequenzgängen fehlen auch hier Messungen für einen Vergleich mit den Rechnungen. So bleibt nur festzuhalten, dass die Kombination einer Feldberechnung mit der Randlelementmethode sowie einer Netzberechnung tatsächlich die Eigenformen in der Stromverteilung – und damit auch im magnetischen Feld längs der Spulenachse – liefert. Offensichtlich ist dafür das zu Grunde liegende Modell der kapazitiven Kopplungen ausreichend. Neben den im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Überlegungen sind die berechneten Eigenformen ein weiterer Hinweis darauf, dass das verwendete Modell zumindest plausibel ist. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, Überlastungen einzelner Leiter durch interne Resonanzanregung zu berechnen und so Defekte zu vermeiden oder aufzuklären.

## 6 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit ist die Randelementmethode als Berechnungsverfahren für zweidimensionale Feldprobleme am Beispiel von Leistungstransformatoren untersucht worden. Durch die Abwicklung der Spulen in den Transformatoren ergibt sich eine ebene Geometrie, die für die Randelementmethode die Grundlage bildet. Wesentlich für das Verfahren ist der Eisenkern, der auch bei realen Transformatoren das magnetische Feld stark in die Kernebene zieht.

Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen werden Helmholtz'sche und Laplace'sche Differentialgleichungen abgeleitet, die zusammen mit den Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen der modellierten Leiter das zu lösende Randwertproblem beschreiben. Als Diskretisierungsschritt sind die Ränder der Leiter in kleine Abschnitte, genannt Randelemente, eingeteilt worden, auf denen das Vektorpotential und dessen Ableitung in Normalenrichtung als konstant angenommen werden. Die Randintegrale entlang der Leiterränder gehen mit dieser Approximation in Summen über, die als ein Gleichungssystem für die unbekannten Vektorpotentiale und deren Ableitungen auf den Randelementen angesehen werden können. Zusätzlich liefert dieses Gleichungssystem für jeden Leiter eine weitere, komplexe Konstante, die als Spannungsabfall entlang dieses Leiters zu interpretieren ist.

Von den berechneten Konstanten ausgehend wird gezeigt, wie daraus die induktiven Kopplungen zwischen Leiterschleifen und ganzen Wicklungen numerisch zu bestimmen sind. Damit ist es möglich, eine Induktivitätsmatrix für zweidimensionale Transformatormodelle zu berechnen. Aus dieser können dann z.B. die Streu- oder Nullinduktivitäten ermittelt werden. Beachtet man auch die ohmschen Anteile, so ergeben sich zusätzlich sogar die Kurzschlussverluste. Dabei ist die Genauigkeit, mit der Messwerte reproduziert werden, bei den ermittelten Streuinduktivitäten am größten. Abweichungen von unter 1 % sind möglich, unter 5 % zumindest die Regel. Dabei ist Methode an verschiedenen Bautypen realer Transformatoren verifiziert worden. Es werden für diese Vorausberechnungen aus den Entwurfsparametern des Herstellers keine Erfahrungsfaktoren benötigt. Allerdings steigen die Fehler bei Wicklungen, die nicht in der Nähe der Joche enden, stärker an. Die Ursache dafür dürften Fensterquerflüsse sein, die mit einem zweidimensionalen Modell nicht genau genug zu erfassen sind.

Als eine weitere Anwendung können die Wicklungskräfte berechnet werden. Dabei werden Differenzen in der magnetischen Energie betrachtet, die durch kleine Verschiebungen der Wicklungen hervorgerufen werden. Während die radialen Normalkräfte etwa bis auf 2 % die Erfahrungswerte erreichen, treten bei den entlang der Wicklungsachse wirkenden Schubkräften nur Ergebnisse mit einem breiteren Toleranzbereich auf. Wiederum sind Quersfelder ausschlaggebend, denn sie rufen die Schubkräfte hervor. Dagegen werden die Normalkräfte von den wesentlich genauer zu berechnenden Längsfeldern verursacht. Insgesamt ist das Verfahren der Kraftberechnung über die magnetische Energie vor allem wegen der deutlich geringeren Anforderungen an Rechnerressourcen einer Integration der Lorentz-Kraft überlegen.

Abschließend werden die Frequenzgänge und Stromverteilungen in den Wicklungen betrachtet, die sich bei einer Speisung mit einer Eigenfrequenz des Transformators ausbilden. Dazu ist die Feldberechnung um eine Netzberechnung ergänzt worden; sie berücksichtigt die kapazitiven Kopplungen zwischen den Leitern. Für die Erd-, Koppel-, Scheiben- und Lagenkapazitäten konnten teilweise Messwerte verwendet werden, teilweise galt es, Abschätzungen mit

---

einfachen Kondensatorgeometrien zu benutzen. Die ermittelten Frequenzgänge entsprechen den messtechnisch bestimmten Verläufen von anderen Transformatoren und sind bei niedrigen Frequenzen unabhängig von der Modellierung. In den berechneten Frequenzgängen sind zahlreiche Eigenfrequenzen vorhanden, vor allem im Bereich oberhalb von 1 MHz. Bei den Eigenfrequenzen bis zu 1 MHz konnten in der Stromverteilung innerhalb der Wicklungen Eigenformen nachgewiesen werden, die mit denjenigen übereinstimmen, die in früheren Arbeiten gemessen worden sind.

Von grundlegender Bedeutung für die in dieser Arbeit dargestellten Rechnungen sind die verfügbaren Rechnerressourcen. Zwar ist mit der Randelementmethode vom Ansatz her eine recht genaue Modellierung bei vertretbarem Speicherbedarf möglich, für die vollständige Nachbildung eines dreiphasigen Transformators reichen jedoch auch die heute verfügbaren Höchstleistungsrechner nicht aus. Dieses wird schon in wenigen Jahren anders sein. Dann könnten Modelle mit deutlich mehr Randelementen auf den Leitern berechnet werden, um die bislang nicht präzise erfassten Querfelder sowie die Zusatzverluste besser bestimmen zu können. Auch sollte dann die Rechner-Hardware, die für diese Arbeit benötigt worden ist, kein Hindernis mehr darstellen, um die Randelementmethode in der Praxis einzusetzen. Eine Verallgemeinerung des Problems auf drei Dimensionen kann ebenfalls dazu beitragen, die Felder genauer als bisher zu erfassen, sobald entsprechende Rechenleistung zur Verfügung steht.

## A Erläuterung des Gauß-Algorithmus auf Blockmatrixbasis

In diesem Abschnitt wird anhand eines kleinen Beispiels die Funktionsweise und das Speicherplatzverhalten des im Programm REM verwendeten Blockmatrixalgorithmus verdeutlicht. Zu lösen ist ein lineares Gleichungssystem, wie es bei der Berechnung eines einphasigen Transformatormodells unter Berücksichtigung der Symmetrie entsteht. Als obere Grenze wählt man für die Anzahl der Blöcke den Wert 5. Damit erhält das sich ergebende Gleichungssystem die folgende Struktur:

$$\begin{pmatrix} [a_{11}] & [0] & [a_{13}] & [0] & [a_{15}] \\ [0] & [a_{22}] & [0] & [a_{24}] & [a_{25}] \\ [a_{31}] & [a_{32}] & [a_{33}] & [a_{34}] & [0] \\ [a_{41}] & [a_{42}] & [a_{43}] & [a_{44}] & [0] \\ [0] & [0] & [a_{53}] & [a_{54}] & [a_{55}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [x_1] \\ [x_2] \\ [x_3] \\ [x_4] \\ [x_5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [a_{56}] \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

In dieser Darstellung kennzeichnet  $[0]$  eine Nullmatrix und  $[a_{ij}]$  einen Matrixblock, der aus den Eingabedaten bestimmt werden kann. Die gesuchte Lösung besteht aus den Matrixblöcken  $[x_i]$ . In der weiteren Rechnung ist  $[E]$  eine Einheitsmatrix und mit  $[b_{ij}]$ ,  $[c_{ij}]$ ,  $[d_{ij}]$  und  $[e_{ij}]$  werden neu berechnete Matrixblöcke bezeichnet.  $[h]$  ist eine Hilfsgröße, die als kurzzeitiger Zwischenspeicher dient.

Zur Veranschaulichung des Speicherplatzbedarfs soll die vereinfachende Annahme gemacht werden, dass alle Matrixblöcke gleich groß sind. Dieses ist zwar in der Praxis meistens nicht exakt der Fall, reicht aber hier aus, um den prinzipiellen Effekt zu verdeutlichen. Als Vergleich dient ein herkömmlicher Gauß-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems, bei dem alle Matrixblöcke bekannt sein müssen und damit Speicher belegen. In diesem Fall sind das 35 Blockmatrizen. Davon sind 18 am Anfang belegt, 5 gehören zum Lösungsvektor und die übrigen 12 sind zunächst leer.

Es sollen zwei Fälle unterschieden werden: Zum einen die vollständige Lösung des Gleichungssystems, wie sie etwa für die Berechnung der Felder oder Ströme an einer beliebigen Stelle der  $xy$ -Ebene benötigt wird, und zum anderen die Teillösung, bei der nur  $[x_5]$  bestimmt wird wie bei der Streuinduktivitätsberechnung. Der Speicherbedarf im ersten Fall wird mit  $V$ , der im zweiten Fall mit  $T$  bezeichnet.

In beiden Fällen wird zunächst die ersten Zeile mit der Inversen des Matrixblockes  $[a_{11}]$  multipliziert. Dabei wird aus  $[a_{11}]$  die Einheitsmatrix  $[E]$ , also muss diese Rechnung nicht ausgeführt und das Ergebnis  $-[E]$  nicht gespeichert werden. Auf diese Weise werden Zeit und Speicherplatz gespart. Analog ergeben die Multiplikationen des Inversen von  $[a_{11}]$  mit den Nullmatrizen in den Spalten 2 und 4 wieder Nullmatrizen, die ebenfalls weder berechnet noch gespeichert werden müssen. Im Detail werden die Operationen 1 bis 9 durchgeführt.

Nr.	Operation	V	T
1	Erzeuge $[a_{11}]$	1	1
2	Berechne $[b_{11}] = [a_{11}]^{-1}$	2	2
3	Lösche $[a_{11}]$	1	1
4	Erzeuge $[a_{13}]$	2	2
5	Berechne $[b_{13}] = [b_{11}] \cdot [a_{13}]$	3	3



Nr.	Operation	V	T
6	Lösche $[a_{13}]$	2	2
7	Erzeuge $[a_{15}]$	3	3
8	Berechne $[b_{15}] = [b_{11}] \cdot [a_{15}]$	4	4
9	Lösche $[a_{15}], [b_{11}]$	2	2

Tabelle A.1: Bearbeitung der ersten Zeile des Gleichungssystems.

Damit bekommt die erste Zeile der Matrix des linearen Gleichungssystem die Gestalt

$$([E] \ [0] \ [b_{13}] \ [0] \ [b_{15}]) . \quad (\text{A.2})$$

In einem weiteren Schritt müssen in der ersten Spalte überall unterhalb der erste Zeile Nullblöcke erzeugt werden. Dazu werden nur die Zeilen 3 und 4 bearbeitet, weil in den anderen Zeilen in der Spalte 1 bereits eine Nullmatrix steht. Zur Erzeugung von Nullmatrizen in der ersten Spalte zieht man ein entsprechendes Vielfaches der ersten Spalten von den betreffenden Spalten ab. Auch dabei werden die Rechenvorteile ausgenutzt, die sich durch Nullmatrizen ergeben.

Nr.	Operation	V	T
10	Erzeuge $[a_{31}]$	3	3
11	Berechne $[h] = [a_{31}] \cdot [b_{13}]$	4	4
12	Erzeuge $[a_{33}]$	5	5
13	Berechne $[b_{33}] = [a_{33}] - [h]$	6	6
14	Lösche $[h], [a_{33}]$	4	4
15	Berechne $[h] = [a_{31}] \cdot [b_{15}]$	5	5
16	Berechne $[b_{35}] = -[h]$	6	6
17	Lösche $[h], [a_{31}]$	4	4
18	Erzeuge $[a_{41}]$	5	5
19	Berechne $[h] = [a_{41}] \cdot [b_{13}]$	6	6
20	Erzeuge $[a_{43}]$	7	7
21	Berechne $[b_{43}] = [a_{43}] - [h]$	8	8
22	Lösche $[h], [a_{43}]$	6	6
22a	Lösche $[b_{13}]$	6	5
23	Berechne $[h] = [a_{41}] \cdot [b_{15}]$	7	6
24	Berechne $[b_{45}] = -[h]$	8	7
25	Lösche $[h], [a_{41}]$	6	5
25a	Lösche $[b_{15}]$	6	4

Tabelle A.2: Erzeugen von Nullen in der ersten Spalte.

Die Operationen 22a und 25a werden dann ausgeführt, wenn nur die Teillösung  $[x_5]$  bestimmt werden soll. Nachdem in der ersten Spalte Nullmatrizen erzeugt worden sind, ergibt sich als Zwischenergebnis das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} [E] & [0] & [b_{13}] & [0] & [b_{15}] \\ [0] & [a_{22}] & [0] & [a_{24}] & [a_{25}] \\ [0] & [a_{32}] & [b_{33}] & [a_{34}] & [b_{35}] \\ [0] & [a_{42}] & [b_{43}] & [a_{44}] & [b_{45}] \\ [0] & [0] & [a_{53}] & [a_{54}] & [a_{55}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [x_1] \\ [x_2] \\ [x_3] \\ [x_4] \\ [x_5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [a_{56}] \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Für alle weiteren Zeilen und Spalten wiederholt sich das bisher für die erste Zeile und Spalte geschilderte Vorgehen. So wird die zweite Zeile folgerichtig mit dem Inversen von  $[a_{22}]$  multipliziert.

Nr.	Operation	V	T
26	Erzeuge $[a_{22}]$	7	5
27	Berechne $[b_{22}] = [a_{22}]^{-1}$	8	6
28	Lösche $[a_{22}]$	7	5
29	Erzeuge $[a_{24}]$	8	6
30	Berechne $[b_{24}] = [b_{22}] \cdot [a_{24}]$	9	7
31	Lösche $[a_{24}]$	8	6
32	Erzeuge $[a_{25}]$	9	7
33	Berechne $[b_{25}] = [b_{22}] \cdot [a_{25}]$	10	8
34	Lösche $[a_{25}], [b_{22}]$	8	6

Tabelle A.3: Bearbeitung der zweiten Zeile des Gleichungssystems.

Analog zur ersten Zeile nimmt damit die zweite Zeile die Form

$$([0] \ [E] \ [0] \ [b_{24}] \ [b_{25}]) \quad (\text{A.4})$$

an. Auf diese Weise können in der zweiten Spalte unterhalb der zweiten Zeile Nullmatrizen erzeugt werden.

Nr.	Operation	V	T
35	Erzeuge $[a_{32}]$	9	7
36	Berechne $[h] = [a_{32}] \cdot [b_{24}]$	10	8
37	Erzeuge $[a_{34}]$	11	9
38	Berechne $[b_{34}] = [a_{34}] - [h]$	12	10
39	Lösche $[h], [a_{34}]$	10	8
40	Berechne $[h] = [a_{32}] \cdot [b_{25}]$	11	9
41	Berechne $[c_{35}] = [b_{35}] - [h]$	12	10
42	Lösche $[h], [b_{35}], [a_{32}]$	9	7
43	Erzeuge $[a_{42}]$	10	8
44	Berechne $[h] = [a_{42}] \cdot [b_{24}]$	11	9
44a	Lösche $[b_{24}]$	11	8
45	Erzeuge $[a_{44}]$	12	9
46	Berechne $[b_{44}] = [a_{44}] - [h]$	13	10
47	Lösche $[h], [a_{44}]$	11	8
48	Berechne $[h] = [a_{42}] \cdot [b_{25}]$	12	9

Nr.	Operation	V	T
49	Berechne $[c_{45}] = [b_{45}] - [h]$	13	10
49a	Lösche $[b_{25}]$	13	9
50	Lösche $[h], [a_{42}], [b_{45}]$	10	6

Tabelle A.4: Erzeugung von Nullen in der zweiten Spalte.

Wie schon zuvor werden die Operationen 44a und 49a nur bei der Teillösung des linearen Gleichungssystems durchgeführt. Inzwischen ist ein maximaler Speicherbedarf mit 13 bzw. 10 Einheiten erreicht worden. Das Gleichungssystem nimmt jetzt die folgende Gestalt an:

$$\begin{pmatrix} [E] & [0] & [b_{13}] & [0] & [b_{15}] \\ [0] & [E] & [0] & [b_{24}] & [b_{25}] \\ [0] & [0] & [b_{33}] & [b_{34}] & [c_{35}] \\ [0] & [0] & [b_{43}] & [b_{44}] & [c_{45}] \\ [0] & [0] & [a_{53}] & [a_{54}] & [a_{55}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [x_1] \\ [x_2] \\ [x_3] \\ [x_4] \\ [x_5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [a_{56}] \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Anschließend werden nun die dritte Zeile und Spalte bearbeitet.

Nr.	Operation	V	T
51	Berechne $[c_{33}] = [b_{33}]^{-1}$	11	7
52	Lösche $[b_{33}]$	10	6
53	Berechne $[c_{34}] = [c_{33}] \cdot [b_{34}]$	11	7
54	Lösche $[b_{34}]$	10	6
55	Berechne $[d_{35}] = [c_{33}] \cdot [c_{35}]$	11	7
56	Lösche $[c_{33}], [c_{35}]$	9	5
57	Berechne $[h] = [b_{43}] \cdot [c_{34}]$	10	6
58	Berechne $[c_{44}] = [b_{44}] - [h]$	11	7
59	Lösche $[h], [b_{44}]$	9	5
60	Berechne $[h] = [a_{43}] \cdot [d_{35}]$	10	6
61	Berechne $[d_{45}] = [c_{45}] - [h]$	11	7
62	Lösche $[h], [b_{43}], [c_{45}]$	8	4
63	Erzeuge $[a_{53}]$	9	5
64	Berechne $[h] = [a_{53}] \cdot [c_{34}]$	10	6
64a	Lösche $[c_{34}]$	10	5
65	Erzeuge $[a_{54}]$	11	6
66	Berechne $[b_{54}] = [a_{54}] - [h]$	12	7
67	Lösche $[h], [a_{54}]$	10	5
68	Erzeuge $[a_{55}]$	11	6
69	Berechne $[h] = [a_{53}] \cdot [d_{35}]$	12	7
69a	Lösche $[d_{35}]$	12	6
70	Berechne $[b_{55}] = [a_{55}] - [h]$	13	7
71	Lösche $[h], [a_{53}], [a_{55}]$	10	4

Tabelle A.5: Bearbeitung der dritten Zeile einschließlich Erzeugung von Nullen in der dritten Spalte.

Auch bei diesem Schritt sind die Operationen 64a sowie 69a nur bei einer Teillösung des linearen Gleichungssystems auszuführen. Nach der dritten Iterationsstufe ergibt sich

$$\begin{pmatrix} [E] & [0] & [b_{13}] & [0] & [b_{15}] \\ [0] & [E] & [0] & [b_{24}] & [b_{25}] \\ [0] & [0] & [E] & [c_{34}] & [d_{35}] \\ [0] & [0] & [0] & [c_{44}] & [d_{45}] \\ [0] & [0] & [0] & [b_{54}] & [b_{55}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [x_1] \\ [x_2] \\ [x_3] \\ [x_4] \\ [x_5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [a_{56}] \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

für das Gleichungssystem. Ab jetzt nimmt der Speicherbedarf langsam ab. Die nun durchzuführende Bearbeitung der vierten Zeile und Spalte ist schon deutlich kürzer.

Nr.	Operation	V	T
72	Berechne $[d_{44}] = [c_{44}]^{-1}$	11	5
73	Lösche $[c_{44}]$	10	4
74	Berechne $[e_{45}] = [d_{44}] \cdot [d_{45}]$	11	5
75	Lösche $[d_{44}], [d_{45}]$	9	3
76	Berechne $[h] = [b_{54}] \cdot [e_{45}]$	10	4
76a	Lösche $[e_{45}]$	10	3
77	Berechne $[c_{55}] = [b_{55}] - [h]$	11	4
78	Lösche $[h], [b_{54}], [b_{55}]$	8	1

Tabelle A.6: Bearbeitung der vierten Zeile einschließlich Erzeugung von Nullen in der vierten Spalte.

Wieder wird die Operation 76a nur bei der Teillösung des linearen Gleichungssystems ausgeführt. Vor dem letzten Iterationsschritt hat das Gleichungssystem die Form

$$\begin{pmatrix} [E] & [0] & [b_{13}] & [0] & [b_{15}] \\ [0] & [E] & [0] & [b_{24}] & [b_{25}] \\ [0] & [0] & [E] & [c_{34}] & [d_{35}] \\ [0] & [0] & [0] & [E] & [e_{45}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [c_{55}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [x_1] \\ [x_2] \\ [x_3] \\ [x_4] \\ [x_5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [a_{56}] \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Mit den anschließenden Operationen ist das Gleichungssystem so weit gelöst, dass  $[x_5]$  bestimmt werden kann.

Nr.	Operation	V	T
79	Berechne $[d_{55}] = [c_{55}]^{-1}$	9	2
80	Lösche $[c_{55}]$	8	1
81	Erzeuge $[a_{56}]$	9	2
82	Berechne $[b_{56}] = [d_{55}] \cdot [d_{56}]$	10	3
83	Lösche $[a_{56}], [d_{55}]$	8	1

Tabelle A.7: Bearbeitung der letzten Zeile des Gleichungssystems.

In der Form

$$\begin{pmatrix} [E] & [0] & [b_{13}] & [0] & [b_{15}] \\ [0] & [E] & [0] & [b_{24}] & [b_{25}] \\ [0] & [0] & [E] & [c_{34}] & [d_{35}] \\ [0] & [0] & [0] & [E] & [e_{45}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [E] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [x_1] \\ [x_2] \\ [x_3] \\ [x_4] \\ [x_5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [b_{56}] \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

kann man  $[x_5] = [b_{56}]$  direkt ablesen. Will man auch noch  $[x_1]$  bis  $[x_4]$  berechnen, so sind auch oberhalb der Diagonalen Nullmatrizen zu erzeugen. Da diese Operationen nur noch für die vollständige Lösung des Gleichungssystems relevant sind, ist der Speicherbedarf für die Teillösung  $T$  nicht mehr angegeben.

Nr.	Operation	V
84	Berechne $[h] = [e_{45}] \cdot [b_{56}]$	9
85	Berechne $[b_{46}] = -[h]$	10
86	Lösche $[h], [e_{45}]$	8
87	Berechne $[h] = [d_{35}] \cdot [b_{56}]$	9
88	Berechne $[b_{36}] = -[h]$	10
89	Lösche $[h], [d_{35}]$	8
90	Berechne $[h] = [b_{25}] \cdot [b_{56}]$	9
91	Berechne $[b_{26}] = -[h]$	10
92	Lösche $[h], [b_{25}]$	8
93	Berechne $[h] = [b_{15}] \cdot [b_{56}]$	9
94	Berechne $[b_{16}] = -[h]$	10
95	Lösche $[h], [b_{15}]$	8
96	Berechne $[h] = [c_{34}] \cdot [b_{46}]$	9
97	Berechne $[c_{36}] = [b_{36}] - [h]$	10
98	Lösche $[h], [b_{36}], [c_{34}]$	7
99	Berechne $[h] = [b_{24}] \cdot [b_{46}]$	8
100	Berechne $[c_{26}] = [b_{26}] - [h]$	9
101	Lösche $[h], [b_{26}], [c_{24}]$	6
102	Berechne $[h] = [b_{13}] \cdot [c_{36}]$	7
103	Berechne $[c_{16}] = [b_{16}] - [h]$	8
104	Lösche $[h], [b_{13}], [b_{16}]$	5

Tabelle A.8: Erzeugung von Nullen oberhalb der Diagonalen.

In der nun vorliegenden Form

$$\begin{pmatrix} [E] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [E] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [E] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [E] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [E] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [x_1] \\ [x_2] \\ [x_3] \\ [x_4] \\ [x_5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [c_{16}] \\ [c_{26}] \\ [c_{36}] \\ [b_{46}] \\ [b_{56}] \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

kann die komplette Lösung des Gleichungssystems abgelesen werden.

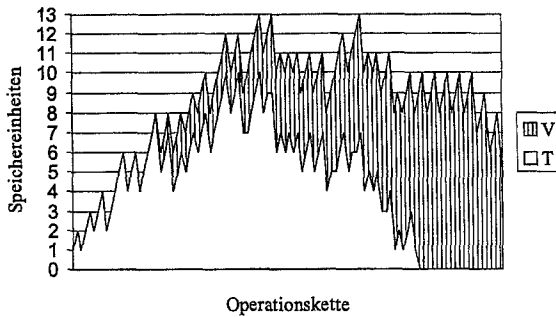


Bild A.1: Vergleich des Speicherbedarfs bei einer vollständigen Lösung des linearen Gleichungssystems ( $V$ ) mit dem bei der alleinigen Bestimmung von  $[x_s]$  ( $T$ ). Zunächst benötigen beide Rechnungen den gleichen Speicher. Im weiteren Verlauf der Operationskette sinkt  $T$  schneller als  $V$ .

Es zeigt sich, dass eine vollständige Lösung des Gleichungssystems eine um etwa 25 % längere Operationskette benötigt als die Teillösung, bei der nur der unterste Block im Lösungsvektor bestimmt wird. Relevant für die Rechenzeit sind jedoch nur einerseits die Matrizenmultiplikationen, die etwa 90 % des Rechenzeitbedarfs ausmachen, der bei der Lösung großer Gleichungssysteme entsteht. Andererseits entfallen ungefähr 8 % auf die Inversionen, während die Subtraktionen, das Erzeugen der Matrizen und der ganze Rest des Programms die verbleibenden 2 % der Zeit benötigen. Unter diesem Gesichtspunkt muss man die Anzahl der Matrizenmultiplikationen und -inversion vergleichen. Die vollständige Lösung des linearen Gleichungssystems enthält insgesamt 33 dieser Operationen, die Teillösung nur 26. Auch hier beträgt die Ersparnis etwa 25 %. Diese Zahlen lassen sich mit einem Gauß-Algorithmus vergleichen, der im herkömmlichen Verfahren ohne Kenntnis von Null- und Einheitsmatrizen und den damit einher gehenden Rechenvorteilen arbeitet. Gemäß [10] benötigt der Gauß-Algorithmus  $\frac{1}{3}n^3$  Multiplikationen und Divisionen, bei der vorliegenden Dimension  $n = 5$  also etwa 42. Dazu weist das hier verwendete Verfahren eine Ersparnis von 21 % bei der vollständigen und 32 % bei der teilweisen Lösung des Gleichungssystems auf.

Wesentlich interessanter sind jedoch die Aussagen über den Speicherbedarf, der bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen überwiegend die Engpassgröße darstellt. Während für einen Lösungsalgorithmus, der das ganze System im Speicher hält, 35 Einheiten Speicher benötigt werden, verbraucht der Blockmatrixalgorithmus nur 13 Einheiten für die vollständige Lösung und maximal 10 Einheiten für die Teillösung zur Bestimmung des letzten Blockes im Lösungsvektor. Das entspricht einer Reduktion auf 35 % bzw. unter 29 % des ursprünglichen Speicherbedarfs. Der jeweils benötigte Bedarf im Verlauf der Operationskette ist Abbildung A.1 zu entnehmen.

## B Verwendete Rechner

Für die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen sind vier Rechner verwendet worden. Um aus den Angaben zur Rechenzeit Abschätzungen für andere Rechner ableiten zu können, sollen in diesem Anhang die im Text nur benannten Rechner genauer beschrieben werden. Grundsätzlich beziehen sich alle genannten Rechenzeiten auf die benötigten CPU-Zeiten, also die Summe der Rechenzeiten aller verwendeten Prozessoren.

- **Hewlett-Packard V2250**

Der Parallelrechner der Universität der Bundeswehr Hamburg ist mit 16 PA-Risc 8200-Prozessoren mit 240 MHz Taktfrequenz und 8 Gigabytes Hauptspeicher ausgestattet. Einzelne Rechnungen sind mit 6 CPUs und bis zu 4 Gigabytes RAM durchgeführt worden. Regelmäßig stand Auslagerungsspeicher bis maximal 15 Gigabytes zur Verfügung, so dass die größten Rechnungen auf dieser Anlage nicht durchgeführt werden konnten.

Auf dieser V-Klasse wie auch auf den anderen Rechnern von Hewlett-Packard ist die Mathematikbibliothek MLIB von Hewlett-Packard für die Multiplikation und Inversion von Matrizen verwendet worden (vgl. [25]). Diese Bibliothek ist für die entsprechenden Rechner optimiert und parallelisiert automatisch. Verbesserungen an der MLIB haben im Laufe dieser Arbeit zu einem erheblichen Leistungszuwachs geführt.

- **NEC SX-4**

Auf zwei Rechnern dieses Typs am Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart konnten maximal 16 CPUs und 4 Gigabytes RAM genutzt werden. Zusätzlich standen etwa ein Gigabyte an speziellem Expansionsspeicher sowie unbeschränkter Festplattenplatz zur Verfügung. Aufgrund des beschränkten Rechenzeitkontingents und langer Wartezeiten sind diese Rechner nicht ihrer Leistungsfähigkeit entsprechend verwendet worden.

Da zum Zeitpunkt der Implementation auf der NEC SX-4 keine parallelen Mathematikbibliotheken zur Verfügung standen, mussten einfache selbstentwickelte Multiplikations- und Inversionsroutinen für parallele Berechnungen verwendet werden.

- **Hewlett-Packard N4000**

Dieser Server des Fachgebiets für Elektrische Energieversorgung und Hochspannungstechnik im Fachbereich Elektrotechnik der Universität der Bundeswehr Hamburg ist mit 2 CPUs vom Typ PA-Risc 8500 mit 360 MHz Taktfrequenz sowie 4 Gigabytes RAM ausgestattet, die komplett genutzt worden sind. Weiterhin waren bis zu 140 Gigabyte temporärer Auslagerungsspeicher auf der Festplatte nutzbar. Deshalb sind die größten Rechnungen auf dieser Maschine durchgeführt worden.

- **Hewlett-Packard L2000**

Der Applikationsserver des Fachgebiets für Elektrische Energieversorgung und Hochspannungstechnik ist nur für wenige kleinere Berechnungen eingesetzt worden, um den Benutzerbetrieb nicht zu beeinträchtigen. Er ist mit 4 PA-Risc 8500-Prozessoren mit einer Taktfrequenz von 440 MHz ausgerüstet. Die 4 Gigabyte Hauptspeicher sind nicht ausgenutzt worden.

## Literatur

- [1] Rogowski, W.: Über das Streufeld und den Streuinduktionskoeffizienten eines Transformators mit Scheibenwicklung und geteilten Erdsulen. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete der Ingenieurwesen, herausgegeben vom Verein Deutscher Ingenieure (1905) 71, Seiten 1-35.
- [2] Kost, Arnulf: Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1994.
- [3] Meyer, Thorsten: Zweidimensionale feldtheoretische Berechnung von Streuinduktivitäten sowie der Frequenzgänge von verlustbehafteten induktiven Systemen. Dissertation Universität der Bundeswehr Hamburg, 1996.
- [4] Jackson, John David: Klassische Elektrodynamik. Walter de Gruyter Berlin New York, 1983.
- [5] Ehrich, Matthias: Seminar Theoretische Elektrotechnik.
- [6] Ehrich, Matthias: Transiente und quasistationäre Stromverdrängung ebener Leiteranordnungen. Habilitationsschrift TU Berlin, 1979.
- [7] Greenberg, Michael D.: Application of Green's Functions in Science and Engineering. Prentic Hall Englewood Cliffs, 1971.
- [8] Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A.: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publishing New York, 1972.
- [9] Zurmühl, Rudolf; Falk, Sigurd: Matrizen und ihre Anwendungen, Teil 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1986.
- [10] Zurmühl, Rudolf: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1965.
- [11] Dongarra, Jack: Linpack Benchmark. The Performance Database Server, <http://performance.netlib.org/performance/html/linpack.data.col0.html>
- [12] Huber, Walter: Paralleles Rechnen. Oldenbourg Verlag München Wien, 1997.
- [13] Heuck, Klaus; Dettmann, Klaus-Dieter: Elektrische Energieversorgung. Vieweg Verlag Braunschweig, 1999.
- [14] Frohne, Heinrich; Ueckert, Erwin: Einführung in die Elektrotechnik, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1985.
- [15] Baehr, Reinhart: Erwärmung und Kühlung. In: Werner Dietrich (Hrsg.), Transformatoren, VDE-Verlag Berlin, 1986.
- [16] DIN VDE 0532 Transformatoren und Drosselspulen, Teil 101: Leistungstransformatoren. VDE-Verlag Berlin, 1997.



- [17] Dietrich, Werner: Prüfung von Transformatoren. In: Werner Dietrich (Hrsg.), Transformatoren, VDE-Verlag Berlin, 1986.
- [18] Lautz, Günter: Elektromagnetische Felder, Teubner Studienbücher Stuttgart, 1976.
- [19] Lunze, Klaus; Wagner, Eberhart: Einführung in die Elektrotechnik - Arbeitsbuch. Dr. Alfred Hüthig Verlag Heidelberg, 1984.
- [20] Küpfmüller, Karl: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [21] Weller, Friedrich: Numerische Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Vieweg Verlag Braunschweig Wiesbaden, 1996.
- [22] Küchler, Rudolf: Die Transformatoren - Grundlagen für ihre Berechnung und Konstruktion. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1966.
- [23] Späth, Helmuth: Eindimensionale Spline-Interpolations-Algorithmen. Oldenbourg Verlag München Wien, 1990.
- [24] Leohold, Jürgen: Untersuchung des Resonanzverhaltens von Transformatorwicklungen. Dissertation Universität Hannover, 1984.
- [25] Gerthsen, Christian; Kneser, Hans O.; Vogel, Helmut: Physik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [26] HP MLIB User's Guide. Hewlett Packard Company, 1999.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Abwicklung einer konzentrisch gewickelten Windung . . . . .	4
2.2	Querschnittsebene eines 110-kV-/10-kV-Transformators . . . . .	5
2.3	Einteilung eines quadratischen Leiterquerschnitts in Randelemente . . . . .	17
2.4	Transformatormodell zur Veranschaulichung der Struktur des Gleichungssystems . . . . .	24
2.5	Verschiedene Möglichkeiten der Symmetrie . . . . .	27
3.1	Einphasiges T-Ersatzschaltbild eines Zwe Wicklungstransformators . . . . .	34
3.2	Einphasiges T-Ersatzschaltbild eines Zwe Wicklungstransformators . . . . .	35
3.3	Vergleich der Selbstinduktivität bei einem und 100 Randelementen . . . . .	43
3.4	Einfaches einphasiges Transformatormodell . . . . .	44
3.5	Vergleich des Wirkwiderstandes bei einem und 100 Randelementen . . . . .	44
3.6	Vereinfachtes einphasiges Ersatzschaltbild eines Drehstromtransformators . . . . .	46
3.7	Feldbild bei Speisung mit einem Nullsystem . . . . .	47
3.8	Speisung eines Transformators mit einer Nullspannung . . . . .	48
3.9	Modell 1 des 110-kV-/10-kV-Transformators . . . . .	51
3.10	Einphasiges Modell 1 mit mittlerer oder äußerer Phase . . . . .	51
3.11	Relative Kurzschluss-Spannung in Abhängigkeit von der Randelementezahl . . . . .	58
3.12	Symmetrische und reale Windungen . . . . .	62
3.13	Modell 1 des 110-kV-/20-kV-Transformators . . . . .	64
3.14	Untersucher 63-MVA-Doppelstock-Transformator . . . . .	68
3.15	Schaltung beim Betrieb eines Stockwerks . . . . .	71
3.16	Prinzipieller Aufbau des 50-kVA-Folientransformators . . . . .	78
3.17	Prinzipieller Aufbau des 1600-kVA-Folientransformators . . . . .	82
4.1	Quadratisches Leiterpaar . . . . .	88
4.2	Kraftwirkung auf Transformatorwicklungen . . . . .	96
5.1	Einfaches Beispiel für die Verknüpfung von Feld- und Netzberechnung . . . . .	102
5.2	Vergleich zwischen direkt berechneter und interpolierter Selbstinduktivität . . . . .	110
5.3	Vergleich zwischen direkt berechnetem und interpoliertem Widerstand . . . . .	110
5.4	Vergleich zwischen direkt und interpoliert berechneter Eingangsadmittanz (Absolutwert) . . . . .	112
5.5	Vergleich zwischen direkt und interpoliert berechneter Eingangsadmittanz (Phase) . . . . .	112
5.6	Spule mit identischen Induktivitäten . . . . .	113
5.7	Aufteilung einer Kapazität in Form von $\Pi$ -Ersatzschaltbildern . . . . .	115
5.8	Berücksichtigte Erdkapazitäten . . . . .	116
5.9	Berücksichtigte Lagen- und Scheibenkapazitäten . . . . .	116
5.10	Berücksichtigte Koppelkapazitäten . . . . .	117

5.11	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete überspannungsseitige Eingangsadmittanz für das Modell 1 . . . . .	120
5.12	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz für das Modell 1 . . . . .	120
5.13	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete überspannungsseitige Eingangsadmittanz für das Modell 2 . . . . .	121
5.14	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz für das Modell 2 . . . . .	121
5.15	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete überspannungsseitige Eingangsadmittanz für das Modell 3 . . . . .	122
5.16	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz für das Modell 3 . . . . .	122
5.17	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete überspannungsseitige Eingangsadmittanz für das Modell 1 . . . . .	124
5.18	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz für das Modell 1 . . . . .	124
5.19	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete überspannungsseitige Eingangsadmittanz für das Modell 2 . . . . .	125
5.20	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz für das Modell 2 . . . . .	125
5.21	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete überspannungsseitige Eingangsadmittanz für das Modell 3 . . . . .	126
5.22	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsadmittanz für das Modell 3 . . . . .	126
5.23	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete überspannungsseitige Eingangs-impedanz für das Modell 1 . . . . .	127
5.24	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsimpedanz für das Modell 1 . . . . .	127
5.25	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete überspannungsseitige Eingangs-impedanz für das Modell 2 . . . . .	128
5.26	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsimpedanz für das Modell 2 . . . . .	128
5.27	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete überspannungsseitige Eingangs-impedanz für das Modell 3 . . . . .	129
5.28	110-kV-/10-kV-Transformator: Berechnete Phase der überspannungsseitigen Eingangsimpedanz für das Modell 3 . . . . .	129
5.29	110-kV-/10-kV-Transformator: Resonanz zwischen Hauptinduktivität und Eingangskapazität . . . . .	131
5.30	110-kV-/10-kV-Transformator: Resonanz zwischen Hauptinduktivität und Eingangskapazität (Phase) . . . . .	131
5.31	Räumliche Abhängigkeit der Leiterströme im Kurzschlussfall . . . . .	133
5.32	Räumliche Abhängigkeit der Leiterströme im Leerlauf . . . . .	133

5.33 Stromverteilung in der Oberspannungswicklung im Kurzschlussfall . . . . .	134
A.1 Speicherbedarf bei der Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	145

## Tabellenverzeichnis

3.1	110-kV-/10-kV-Transformator: Windungszahlen der verschiedenen Modelle . . . . .	52
3.2	110-kV-/10-kV-Transformator: Laufzeiten und Speicherbedarf einphasiger Modelle (mittlere Phase) . . . . .	53
3.3	110-kV-/10-kV-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (mittlere Phase) . . . . .	53
3.4	110-kV-/10-kV-Transformator: Energiegewichtete Länge . . . . .	54
3.5	110-kV-/10-kV-Transformator: Laufzeiten und Speicherbedarf einphasiger Modelle (äußere Phase) . . . . .	55
3.6	110-kV-/10-kV-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (äußere Phase) . . . . .	55
3.7	110-kV-/10-kV-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen bei einphasiger Berechnung (gemittelt) . . . . .	56
3.8	110-kV-/10-kV-Transformator: Konvergenzverhalten beim Modell 1 . . . . .	57
3.9	110-kV-/10-kV-Transformator: Konvergenzverhalten beim Modell 4 . . . . .	57
3.10	110-kV-/10-kV-Transformator: Numerisch ermittelte Kurzschlussverluste . . . . .	58
3.11	110-kV-/10-kV-Transformator: Laufzeiten und Speicherbedarf dreiphasiger Modelle . . . . .	59
3.12	110-kV-/10-kV-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (dreiphasig) . . . . .	60
3.13	110-kV-/10-kV-Transformator: Vergleich zwischen einphasig und dreiphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen . . . . .	60
3.14	110-kV-/10-kV-Transformator: Numerisch ermittelte Nullreaktanzen . . . . .	61
3.15	110-kV-/20-kV-Transformator: Windungszahl der verschiedenen Modelle . . . . .	63
3.16	110-kV-/20-kV-Transformator: Laufzeiten und Speicherbedarf einphasiger Modelle (mittlere Phase) . . . . .	65
3.17	110-kV-/20-kV-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (mittlere Phase) . . . . .	65
3.18	110-kV-/20-kV-Transformator: Laufzeiten und Speicherbedarf einphasiger Modelle (äußere Phase) . . . . .	65
3.19	110-kV-/20-kV-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (äußere Phase) . . . . .	66
3.20	110-kV-/20-kV-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen bei einphasiger Berechnung (gemittelt) . . . . .	66
3.21	110-kV-/20-kV-Transformator: Numerisch ermittelte Kurzschlussverluste . . . . .	66
3.22	110-kV-/20-kV-Transformator: Laufzeiten und Speicherbedarf dreiphasiger Modelle . . . . .	67
3.23	110-kV-/20-kV-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (dreiphasig) . . . . .	67
3.24	110-kV-/20-kV-Transformator: Vergleich zwischen einphasig und dreiphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen . . . . .	68
3.25	Doppelstock-Transformator: Windungszahl der verschiedenen Modelle . . . . .	69

3.26 Doppelstock-Transformator: Laufzeiten und Speicherbedarf einphasiger Modelle (mittlere Phase) . . . . .	70
3.27 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (mittlere Phase) beim Kurzschlussversuch 1 . . . . .	70
3.28 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (mittlere Phase) bei den Kurzschlussversuchen 2 und 3 . . . . .	71
3.29 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (mittlere Phase) beim Kurzschlussversuch 4 . . . . .	72
3.30 Doppelstock-Transformator: Laufzeiten und Speicherbedarf einphasiger Modelle (äußere Phase) . . . . .	72
3.31 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (äußere Phase) beim Kurzschlussversuch 1 . . . . .	72
3.32 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (äußere Phase) bei den Kurzschlussversuchen 2 und 3 . . . . .	73
3.33 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen (äußere Phase) beim Kurzschlussversuch 4 . . . . .	73
3.34 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen des Kurzschlussversuches 1 bei einphasiger Berechnung (gemittelt) . . . . .	73
3.35 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen der Kurzschlussversuche 2 und 3 bei einphasiger Berechnung (gemittelt) . . . . .	74
3.36 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen des Kurzschlussversuches 4 bei einphasiger Berechnung (gemittelt) . . . . .	74
3.37 Doppelstock-Transformator: Laufzeiten und Speicherbedarf dreiphasiger Modelle . . . . .	75
3.38 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen beim Kurzschlussversuch 1 (dreiphasig) . . . . .	75
3.39 Doppelstock-Transformator: Vergleich zwischen einphasig und dreiphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen beim Kurzschlussversuch 1 . . .	75
3.40 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen der Kurzschlussversuche 2 und 3 (dreiphasig) . . . . .	76
3.41 Doppelstock-Transformator: Vergleich zwischen einphasig und dreiphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen bei den Kurzschlussversuchen 2 und 3 . . . . .	76
3.42 Doppelstock-Transformator: Relative Kurzschluss-Spannungen beim Kurzschlussversuch 4 (dreiphasig) . . . . .	76
3.43 Doppelstock-Transformator: Vergleich zwischen einphasig und dreiphasig ermittelten relativen Kurzschluss-Spannungen beim Kurzschlussversuch 4 . . .	76
3.44 Doppelstock-Transformator: Numerisch ermittelte Kurzschlussverluste für den Kurzschlussversuch 1 . . . . .	77
3.45 Doppelstock-Transformator: Numerisch ermittelte Kurzschlussverluste für die Kurzschlussversuche 2 und 3 . . . . .	78
3.46 50-kVA-Folientransformator: Laufzeiten und Speicherbedarf einphasiger Modelle (mittlere Phase) . . . . .	79

3.47	50-kVA-Folientransformator: Relative Kurzschluss-Spannungen bei Nachbildung der mittleren Phase . . . . .	79
3.48	50-kVA-Folientransformator: Laufzeiten und Speicherbedarf einphasiger Modelle (äußere Phase) . . . . .	80
3.49	50-kVA-Folientransformator: Relative Kurzschluss-Spannungen bei Nachbildung einer äußeren Phase . . . . .	80
3.50	50-kVA-Folientransformator: Laufzeiten und Speicherbedarf dreiphasiger Modelle . . . . .	81
3.51	50-kVA-Folientransformator: Relative Kurzschluss-Spannungen bei dreiphasiger Berechnung . . . . .	81
3.52	1600-kVA-Folientransformator: Laufzeiten und Speicherbedarf einphasiger Modelle (mittlere Phase) . . . . .	82
3.53	1600-kVA-Folientransformator: Relative Kurzschluss-Spannungen bei Nachbildung der mittleren Phase . . . . .	83
3.54	1600-kVA-Folientransformator: Laufzeiten und Speicherbedarf einphasiger Modelle (äußere Phase) . . . . .	83
3.55	1600-kVA-Folientransformator: Relative Kurzschluss-Spannungen bei Nachbildung einer äußeren Phase . . . . .	83
3.56	1600-kVA-Folientransformator: Laufzeiten und Speicherbedarf dreiphasiger Modelle . . . . .	84
3.57	1600-kVA-Folientransformator: Relative Kurzschluss-Spannungen bei dreiphasiger Berechnung . . . . .	84
4.1	Erfasster Strom und benötigte Rechenzeit bei der Kraftberechnung über die Integration der Lorentz-Gleichung . . . . .	89
4.2	Mit der Lorentz-Integration bestimmte Kräfte . . . . .	90
4.3	Ergebnisse der Kraftberechnung über die Energiemethode . . . . .	93
4.4	Berechnete Normalkräfte $F_N$ des 110-kV-/10-kV-Transformators . . . . .	97
4.5	Berechnete Schubkräfte $F_S$ des 110-kV-/10-kV-Transformators . . . . .	98
4.6	Konvergenz der mit der Energiemethode bestimmten Kräfte bei unterschiedlichen Verschiebungen . . . . .	99
5.1	Berücksichtigte Kapazitäten und Rechner-Ressourcen der Frequenzgänge . .	118
5.2	Eigenfrequenzen des 110-kV-/10-kV-Transformators . . . . .	119
A.1	Bearbeitung der ersten Zeile des Gleichungssystems . . . . .	140
A.2	Erzeugen von Nullen in der ersten Spalte . . . . .	140
A.3	Bearbeitung der zweiten Zeile des Gleichungssystems . . . . .	141
A.4	Erzeugung von Nullen in der zweiten Spalte . . . . .	142
A.5	Bearbeitung der dritten Zeile und Spalte . . . . .	142
A.6	Bearbeitung der vierten Zeile und Spalte . . . . .	143
A.7	Bearbeitung der letzten Zeile des Gleichungssystems . . . . .	143
A.8	Erzeugung von Nullen oberhalb der Diagonalen . . . . .	144

## Formelzeichen

$\vec{A}$	Vektorpotential
$A_k$	Koeffizient der kubischen Splines
$\vec{B}$	magnetische Flussdichte
$B_k$	Koeffizient der kubischen Splines
$C$	Kapazität
$C_k$	Koeffizient der kubischen Splines
$\vec{D}$	elektrische Verschiebungsflussdichte
$D_k$	Koeffizient der kubischen Splines
$d$	Leiterabstand
$\vec{E}$	elektrische Feldstärke
$\vec{F}$	Kraft
$f$	Frequenz
$G^0$	Greensche Funktion des Laplace-Operators
$G^{\beta}$	Greensche Funktion des Helmholtz-Operators
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke
$I$	elektrischer Strom
$I_k''$	Anfangskurzschlusswechselstrom
$I_s$	Stoßkurzschluss-Strom
$IG_{k,l}^{\beta}$	spezielles Randintegral Gl. (2.74)
$IG_{k,l}^0$	spezielles Randintegral Gl. (2.75)
$IDG_{k,l}^{\beta}$	spezielles Randintegral Gl. (2.76)
$IDG_{k,l}^0$	spezielles Randintegral Gl. (2.77)
$J_0$	Besselsche Funktion
$j$	$\sqrt{-1}$
$K$	Rogowski-Faktor
$\underline{K}$	Leiterkonstante
ker, kei	Real- und Imaginärteil der Kelvinfunktion
$L$	(Selbst-) Induktivität
$L_{\sigma}$	Streuinduktivität
$l_{eg}$	energiegewichtete Windungslänge
$M$	Gegeninduktivität
$N_0$	Neumannsche Funktion
$\vec{n}$	Normalenvektor
$P_G$	Gleichstromverluste
$P_k$	Kurzschlussverluste
$P_Z$	Zusatzverluste
$R$	Ohmscher Widerstand
$R$	Rand (-element)
$\vec{S}$	elektrische Stromdichte
$S_k^{\beta}$	Hilfsgröße Gl. (2.78)
$S_{rT}$	Transformatorbemessungsleistung

 $\underline{U}$ 
 $U_{rT}$ 
 $u_k$ 
 $\ddot{u}$ 
 $V$ 
 $W$ 
 $w$ 
 $X_h$ 
 $X_k$ 
 $X_0$ 
 $\underline{Y}$ 
 $\underline{Z}$ 
 $\underline{Z}_0$ 
 $\alpha$ 
 $\beta$ 
 $\delta$ 
 $\delta_{k,l}$ 
 $\epsilon_0$ 
 $\kappa$ 
 $\Lambda$ 
 $\lambda$ 
 $\mu_0$ 
 $\mu_r$ 
 $\sigma$ 
 $\phi$ 
 $\omega$ 

Spannung

Transformatorbemessungsspannung

relative Kurzschluss-Spannung

Übersetzungsverhältnis

Leiterquerschnittsfläche

magnetische Energie

Windungszahl

Hauptinduktivität

Kurzschlussreaktanz

Nullreaktanz

Admittanz

Impedanz

Nullimpedanz

 $e^{j120^\circ}$ 
 $\sqrt{\omega\sigma\mu}$ 

Diracsche Deltafunktion

Kroneckersymbol

elektrische Feldkonstante

 $8,854 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$ 

Stoßfaktor

Leitwert

Randlementlänge

magnetische Feldkonstante

 $1,257 \cdot 10^{-6} \text{ VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$ 

relative magnetische Permeabilität

elektrische Leitfähigkeit

skalares Potential

Kreisfrequenz

Besondere Symbolik

 $\vec{A}$ 
 $A_x, A_y, A_z$ 
 $\underline{A}$ 
 $A'$ 
 $\Delta A$ 
 $[A]$ 
 $[A]_{k,l}$ 
 $[*]$ 
 $[0]$ 
 $\vec{\nabla}$ 
 $\Delta$ 
 $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ 
 $\partial$ 

Re, Im

Vektor

Vektorkomponenten

komplexe Größe

auf die Länge bezogene Größe

 $A_1 - A_2$ 

Blockmatrix

Matrixelement

von Null verschiedene Matrix

Nullmatrix

Nabla-Operator

Laplace-Operator

Ableitung in Normalenrichtung

Rand einer Fläche

Real- und Imaginärteil



## Stichwortverzeichnis

110-kV-/10-kV-Transformator .. 50, 95, 118  
110-kV-/20-kV-Transformator ..... 63  
1600-kVA-Folientransformator ..... 81  
50-kVA-Folientransformator ..... 78

### A

Abwicklung ..... 3  
Approximation ..... 17

### B

Belegungsschema ..... 24  
Besselfunktion ..... 13  
Blockmatrizen ..... 22, 24, 26, 28, 139

### D

Differentialgleichung  
    Helmholtzsche ..... 7, 12  
    Laplacesche ..... 8, 12  
Differentialoperator ..... 13  
Diskretisierung ..... 12, 16  
Doppelstock-Transformator ..... 68  
Drehstromtransformator ..... 45

### E

Eigenform ..... 130  
Eigenfrequenz ..... 119  
Eingangsdmittanz ..... 119  
Eingangsimpedanz ..... 123  
Eisenverluste ..... 41  
elektrische Leitfähigkeit ..... 3, 11, 51  
Erdkapazität ..... 114, 115, 130  
Erfahrungsfaktoren ..... 41, 54  
Ersatzschaltbild  
    der Kapazitäten ..... 115  
    Zweiwicklungstransformator ..... 33

### F

Fenster ..... 4, 23, 71  
Folientransformator ..... 78

Frequenzgang ..... 101, 118

### G

Gauß-Algorithmus ..... 26, 28, 36, 139  
Gleichstromverluste ..... 41, 59, 77  
Gleichungssystem, lineares .. 19, 22, 25, 28, 101, 139  
Greensche Funktion ..... 13  
Greenscher Satz ..... 14

### H

Helmholtz-Operator ..... 13  
Helmholtzsche Differentialgleichung .. 7, 12

### I

Impedanzmatrix ..... 37  
Induktivität ..... 31, 36  
Integralgleichung ..... 14  
Interpolation ..... 108, 118  
Isolierung ..... 4, 8, 11, 15, 23

### K

Kapazität ..... 101  
    Erd- ..... 114, 115, 130  
    Koppel- ..... 114, 117, 130  
    Lagen- ..... 116  
    Scheiben- ..... 116  
    Windungs- ..... 114  
Kelvinfunktion ..... 13  
Knotengleichung ..... 103  
Knotenpunkte ..... 102  
Konvergenzverhalten ..... 43, 56, 79, 90  
Koppelkapazität ..... 114, 117, 130  
Kraftberechnung ..... 87  
Kurzschlussverluste .. 41, 57, 66, 77, 81, 84, 85

### L

Lagenkapazität ..... 116  
Laplace-Operator ..... 13  
Laplacesche Differentialgleichung ..... 8, 12  
Leerlaufverluste ..... 41

Leiterkonstante ..... 7, 15, 21, 26, 31, 37  
 Leiterquerschnitt ..... 3, 11, 15, 16  
 Leitwert ..... 34  
 lineares Gleichungssystem ... 19, 22, 25, 28,  
 101, 139  
 Lorentz-Formel ..... 87

### M

magnetische Energie ..... 40, 90  
 magnetische Permeabilität ..... 3, 11, 51  
 Maschengleichung ..... 104  
 Maxwellsche Gleichungen ..... 6

### N

Neumann-Funktion ..... 14  
 Normalenableitung ..... 9  
 Normalkraft ..... 96, 97  
 Nullinduktivität ..... 47, 61, 85  
 Nullmatrix ..... 31, 139

### O

ohmscher Widerstand ..... 31

### P

paralleleben ..... 3  
 Parallelschaltung ..... 38  
 Plattenkondensator ..... 117  
 Potential  
   skalares ..... 6  
   Vektor- ..... 6, 12, 15, 19, 21, 31

### Q

Querfeld ..... 71, 98

### R

Randbedingung ..... 8  
 Randelemente ..... 16, 19, 26  
 Randelementlänge ..... 20  
 Randintegral ..... 17  
 Randintegralgleichung ..... 15  
 Randknoten ..... 19  
 Rechenzeit 25, 31, 45, 52, 59, 64, 67, 70, 75,  
 79, 80, 82-84, 93, 108, 111, 118, 145

Reihenschaltung ..... 38  
 relative Kurzschluss-Spannung .. 35, 40, 47,  
 54, 59, 64, 67, 70, 75, 79, 80, 82, 83

### S

Scheibenkapazität ..... 116  
 Schubkraft ..... 96, 98  
 Speicherbedarf 26, 30, 45, 52, 59, 64, 67, 70,  
 75, 79, 80, 82-84, 94, 111, 113, 118, 139  
 Spline-Funktion ..... 108  
 Stetigkeitsbedingung ..... 8, 21  
 Streuinduktivität 34, 40, 45, 52, 59, 70, 74,  
 79, 82, 84, 92  
 Stromeinprägung ..... 4, 11, 12, 36  
 Symmetrie ..... 26, 62

### T

Tor ..... 101

### V

Vektorpotential ..... 6, 12, 15, 19, 21, 31  
 Verluste  
   Eisen- ..... 41  
   Gleichstrom- ..... 41, 59, 77  
   Kurzschluss- .. 41, 57, 66, 77, 81, 84, 85  
   Leerlauf- ..... 41  
   Zusatz- ..... 41, 59, 67, 77

### W

Windungen ..... 26, 36, 50, 63, 68, 78  
 Windungskapazität ..... 114  
 Windungslänge, energiegewichtete ..... 40  
 Wirbelströme ..... 5, 34, 51, 58

### Z

Zusatzverluste ..... 41, 59, 67, 77  
 Zweiwicklungstransformator ..... 33, 40  
   dreiphasiger ..... 45  
 Zylinderkondensator ..... 116

# Lebenslauf

## Persönliche Daten:

Name: Christian Bollmann  
Geburtsdatum: 9.3.1970  
Geburtsort: Salzgitter  
Staatsangehörigkeit: deutsch  
Familienstand: verheiratet mit Birgit Graf

## Schulausbildung:

08/1976-07/1980 Grundschule Broistedt  
08/1980-07/1982 Orientierungsstufe Lengede  
08/1982-05/1989 Gymnasium Groß Ilsede  
Abschluss: Abitur  
Note: 1,2

## Grundwehrdienst:

06/1989-08/1990 1./PzArtBtl 335 in Dedelstorf

## Studium:

10/1990-11/1995 Studium der Physik an der TU Braunschweig  
Abschluss: Diplom-Physiker  
Note: 1,0 Mit Auszeichnung

## Berufstätigkeit:

04/1993-07/1993 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Algebra und Zahlentheorie der TU Braunschweig  
07/1993-08/1993 Werkstudent bei der Siemens AG, Braunschweig  
10/1993-02/1994 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Algebra und Zahlentheorie der TU Braunschweig  
04/1994-07/1994 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Analysis der TU Braunschweig  
seit 05/1996 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet für Elektrische Energieversorgung und Hochspannungstechnik der Universität der Bundeswehr Hamburg

